ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 2015

Θέμα 1^{o}

Να γράψετε στο φύλλο απαντήσεών σας τον αριθμό καθεμιάς από τις ακόλουθες ημιτελείς προτάσεις **1-4** και δίπλα της το γράμμα που αντιστοιχεί στο σωστό συμπλήρωμά της.

1. Η επιλογή ενός σταθμού στο ραδιόφωνο στηρίζεται

α. στη σύνθεση ηλεκτρικών ταλαντώσεων διαφορετικών συχνοτήτων.

β. στο φαινόμενο του συντονισμού.

γ. στη διάθλαση των ραδιοκυμάτων στην κεραία.

δ. στην ανάκλαση των ραδιοκυμάτων στην κεραία. **(Μονάδες 5)**

2. Δύο μικρές σφαίρες κινούνται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και στην ίδια διεύθυνση. Αν η απόστασή τους 2 s πριν την κρούση τους είναι $d_{πριν}$=0,2m και 2s μετά την κρούση τους είναι $d_{μετά}$=0,1m, η κρούση είναι

α. ελαστική

β. τελείως ανελαστική

γ. ανελαστική

δ. ελαστική ή ανελαστική **(Μονάδες 5)**

3. Ακτίνα μονοχρωματικού φωτός προσπίπτει στη διαχωριστική επιφάνεια δύο οπτικών μέσων (1) και (2) με γωνία προσπτώσεως θ_α και διαθλάται με γωνία θ_b . Αν οι ταχύτητες διάδοσής της στα δύο μέσα είναι υ_1 και υ_2 αντίστοιχα και η ανακλώμενη και η διαθλώμενη είναι κάθετες, τότε ισχύει ότι

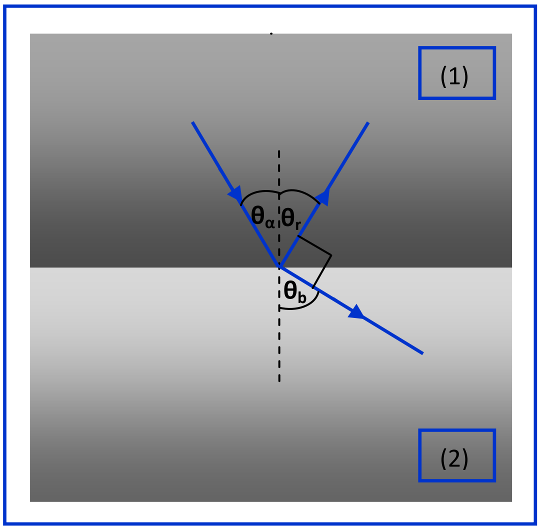
α. $\upsilon_2 ημ\theta_\alpha = \upsilon_1 συν\theta_\alpha$

β. $\upsilon_1 ημ\theta_\alpha = \upsilon_2 συν\theta_\alpha$

γ. $\theta_\alpha - \theta_b = 90^0$

δ. $ημ\theta_\alpha = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}$

(Μονάδες 5)



4. Κατά την περιστροφή της Γης γύρω από τον εαυτό της (ιδιοπεριστροφή) η στροφορμή της διατηρείται σταθερή διότι

α. η ελκτική δύναμη από τον ήλιο δεν εκτελεί έργο

β. ο φορέας της ελκτικής δύναμης από τον ήλιο διέρχεται από το κέντρο μάζας της

γ. περιστρέφεται ταυτόχρονα και γύρω από τον Ήλιο

δ. στο σύστημα Γη –Ήλιος δεν υπάρχουν ροπές εξωτερικών δυνάμεων **(Μονάδες 5)**

5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Τα ραδιοκύματα ανακλώνται στις μεταλλικές επιφάνειες.

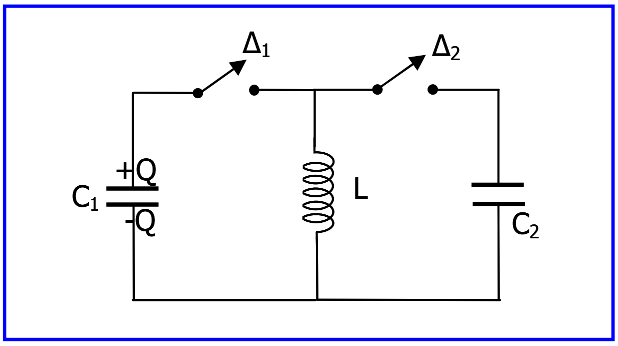
β. Ένα ελεύθερο στερεό μπορεί να εκτελέσει μόνο μεταφορική κίνηση.

γ. Το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης δεν εξαρτάται από τη συχνότητα του διεγέρτη.

δ. Κατά τη διάρκεια μιας κρούσης η δυναμική ενέργεια των σωμάτων σε σχέση με τη θέση τους στο χώρο δε μεταβάλλεται.

ε. Στα αμορτισέρ του αυτοκινήτου και στο εκκρεμές ρολόι επιδιώκουμε μεγάλες αποσβέσεις. **(Μονάδες 5)**

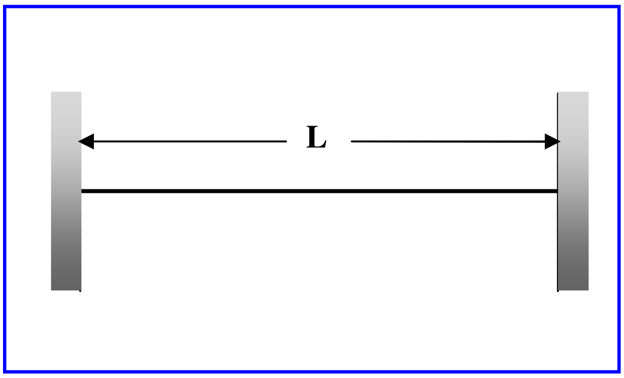
Θέμα 2ο



A_1.Στο κύκλωμα του σχήματος ο πυκνωτής χωρητικότητας C_1 είναι φορτισμένος με φορτίο Q, το ιδανικό πηνίο έχει συντελεστή αυτεπαγωγής L και ο πυκνωτής χωρητικότητας C_2 είναι αφόρτιστος. Οι διακόπτες Δ_1 και Δ_2 που ανοίγουν και κλείνουν σε αμελητέο χρόνο είναι ανοικτοί και κατά τη μετακίνησή τους δεν προκαλούνται ενεργειακές απώλειες. Η εκπεμπόμενη από το εκάστοτε κύκλωμα ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία θεωρείται αμελητέα. Αν τη χρονική στιγμή t=0 κλείσουμε μόνο το διακόπτη Δ_1, με κατάλληλη χρήση των διακοπτών ο ελάχιστος χρόνος για την μεταφορά της ενέργειας του πυκνωτή χωρητικότητας C_1 στον πυκνωτή χωρητικότητας C_2 είναι $t_{min}=\frac{3}{2}\pi\sqrt{LC_1}$ και η χωρητικότητα C_2 είναι ίση με

α. $\frac{C_1}{4}$ **β.** $2C_1$ **γ.** $4C_1$ **(Μονάδες 3)**

A_2. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 5)**

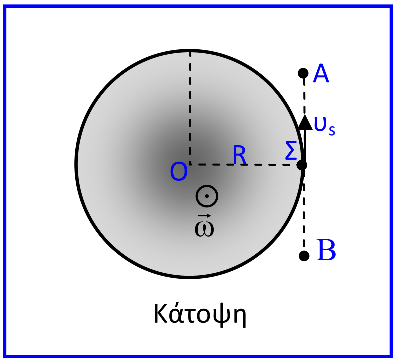


B_1.Χορδή μήκους L έχει στερεωμένα τα δύο άκρα της. Όταν η χορδή διεγείρεται με συχνότητες 100Hz, 200Hz, 250Hz και 300Hz κατά μήκος της δημιουργείται στάσιμο κύμα. Αν μεταξύ των συχνοτήτων των 250Hz και 300Hz δεν υπάρχει άλλη τιμή συχνότητας για την οποία να σχηματίζεται στη χορδή στάσιμο κύμα, τότε, όταν η χορδή διεγείρεται με συχνότητες 100Hz και 200Hz στο μέσο της δημιουργείται

α. δεσμός **β.** κοιλία **γ.** δεσμός και κοιλία αντίστοιχα **(Μονάδες 3)**

B_2. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 5)**

$Γ_1$.Η οριζόντια κυκλική πλατφόρμα ενός παιχνιδιού στο λούνα παρκ έχει ακτίνα R και περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω και φορά αντίθετη από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού γύρω από κατακόρυφο ακλόνητο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της Ο. Η σημειακή ηχητική πηγή s που έχει στερεωθεί στην περιφέρεια της πλατφόρμας εκπέμπει ήχο μήκους κύματος $λ_s$=0,5m, όταν βρίσκεται στη θέση Σ του σχήματος. Δύο ακίνητοι παρατηρητές Α και Β βρίσκονται στην διεύθυνση της ταχύτητας $υ_s$ της ηχητικής πηγής και ισαπέχουν από αυτή (ΑΣ=ΒΣ). Οι παρατηρητές Α και Β ακούν ήχους στους οποίους αντιστοιχούν μήκη κύματος $λ_Α$ και $λ_Β$ που διαφέρουν κατά $Δλ=\frac{1}{170}$m. Οι αποστάσεις (ΟΑ) και (ΑΒ) είναι αντίστοιχα ίσες με 10 και 12 μήκη κύματος του ήχου που θα άκουαν οι παρατηρητές, αν η ηχητική πηγή ήταν στη θέση Ο.

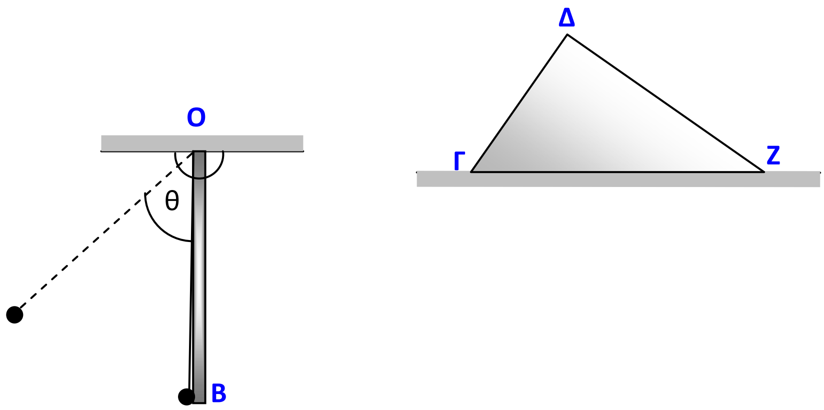


Αν η ταχύτητα διάδοσης στον αέρα που θεωρείται ακίνητος είναι $υ_{ηχ}$=340m/s, το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της πλατφόρμας είναι

α. ω=1 rad/s **β.** ω=0,5 rad/s **γ.** ω=1,5 rad/s **(Μονάδες 3)**

$Γ_2$. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 6)**

Θέμα 3^ο



Μικρή σφαίρα μάζας m=0,2Kg έχει συνδεθεί στο άκρο Α μη ελαστικού νήματος αμελητέας μάζας και μήκους ℓ=0,6m το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο στο σημείο Ο και ηρεμεί σε θέση που το νήμα είναι κατακόρυφο. Λεπτή, ομογενής, λεία και στιλπνή ράβδος μάζας Μ=m και μήκους ℓ έχει συνδεθεί με άρθρωση επίσης στο σημείο Ο, και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το σημείο Ο.Η ράβδος ισορροπεί στην κατακόρυφη θέση. Εκτρέπουμε τη σφαίρα κατά γωνία $\hat{θ}$ ($συν\hat{θ}=\frac{2}{3}$) και την αφήνουμε ελεύθερη.

$α_1$.Να υπολογίσετε τη στροφορμή της σφαίρας ως προς το σημείο Ο, όταν το νήμα βρεθεί στην κατακόρυφη θέση. **(Μονάδες 6)**

Η σφαίρα, όταν το νήμα γίνεται κατακόρυφο, συγκρούεται με το άκρο Α της ράβδου και η κρούση είναι τελείως ελαστική.Οι κινήσεις της σφαίρας και της ράβδου γίνονται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο.

α₂. Να υπολογίσετε τη στροφορμή της ράβδου ως προς το σημείο Ο αμέσως μετά την κρούση. **(Μονάδες 8)**

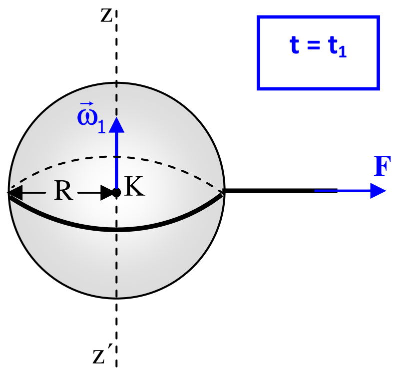
α₃. Να υπολογίσετε τη μέγιστη γωνία στην οποία εκτρέπεται η ράβδος από την κατακόρυφη θέση της μετά την κρούση. **(Μονάδες 5)**

Όταν η ράβδος φθάνει στη θέση μέγιστης εκτροπής της συγκρατείται ακίνητη. Κατακόρυφη ακτίνα φωτός που θεωρείται μονοχρωματικό και διαδίδεται στον αέρα ($n_{αερ}$=1) προσπίπτει σ' αυτήν και ανακλάται. Η ανακλώμενη εισέρχεται σε διαφανές πρίσμα δείκτη διάθλασης n=1,4 που βρίσκεται κοντά στη ράβδο, και έχει τομή ορθογωνίου τριγώνου $Γ\overset{\Delta}{\Delta}Z$. Η έδρα ΓΔ του πρίσματος είναι κάθετη προς τη διεύθυνση της ακινητοποιημένης ράβδου.

β. Να προσδιοριστεί η τιμή του λόγου $\frac{m}{M}$, ώστε η ανακλώμενη ακτίνα μετά τη διάθλασή της στην έδρα ΓΔ του πρίσματος και την πρόσπτωσή της στην έδρα ΔΖ να διαδίδεται κατά τη διεύθυνση της ΔΖ. **(Μονάδες 6)**

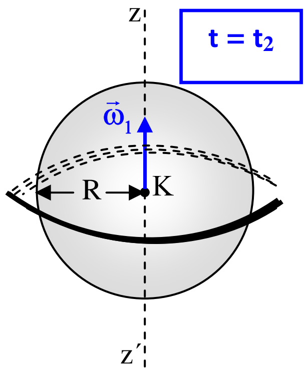
Δίνονται η ροπή αδρανείας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της $I_{(o)} = \frac{1}{3}m\ell^2$, g=10 m/s², $\sqrt{10} = 3{,}16$.

Θέμα 4ο



Ομογενής σφαίρα ακτίνας R=0,5m μπορεί να περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο ακλόνητο άξονα zz΄ που διέρχεται από το κέντρο μάζας της Κ χωρίς τριβές. Στον ισημερινό της σφαίρας είναι τυλιγμένο μη εκτατό νήμα αμελητέας μάζας. Τη χρονική στιγμή t_0=0 μέσω του νήματος ασκείται οριζόντια δύναμη μέτρου F=2N με διεύθυνση εφαπτόμενη στον ισημερινό της σφαίρας. Τη χρονική στιγμή t_1=4s που το νήμα ξετυλίγεται πλήρως η σφαίρα έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω_1=10rad/s.

α. Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας I_Σ της σφαίρας. **(Μονάδες 5)**



Τη χρονική στιγμή t_2=6s συνδέουμε τα ελεύθερα άκρα ομογενούς μεταλλικού ελάσματος μικρού πάχους που περιέβαλλε τον ισημερινό της σφαίρας σε μικρή απόσταση από αυτόν με αποτέλεσμα να δημιουργηθεί κυκλικός δακτύλιος ακτίνας R και ροπής αδράνειας I_Δ=0,1 $Kg\cdot m^2$ το κέντρο του οποίου συμπίπτει με το κέντρο της σφαίρας. Ο δακτύλιος ενώνεται με τη σφαίρα σε αμελητέο χρόνο.

β. Να υπολογίσετε το (%) ποσοστό της μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος σφαίρα – δακτύλιος κατά την ένωσή τους. **(Μονάδες 7)**

γ. Τη χρονική στιγμή t_3=8s αποφασίζουμε να ακινητοποιήσουμε το σύστημα σφαίρας – δακτυλίου. Στη δυνατότητά μας έχουμε δύο τρόπους ακινητοποίησης του συστήματος :

i. με την επίδραση δύναμης μέτρου F_1=2N που επιδρά στην περιφέρεια του ισημερινού και επί του δακτυλίου και αντιτίθεται στην περιστροφική κίνηση του συστήματος

ii. με την επίδραση ζεύγους δυνάμεων της μορφής F_2=18-2t (S.I) με $t \geq 8s$ που επιδρούν σε αντιδιαμετρικά σημεία της περιφέρειας του ισημερινού και επί του δακτυλίου και αρχικά επιδρούν ομόρροπα προς την περιστροφική κίνηση του συστήματος.
Το αίτιο ακινητοποίησης και στις δύο περιπτώσεις καταργείται μετά την ακινητοποποίηση του συστήματος.
Να επιλέξετε τον τρόπο που ακινητοποιεί το σύστημα σε μικρότερο χρόνο.

(Μονάδες 8)

δ. Στην περίπτωση που η ακινητοποίηση του συστήματος γίνεται σύμφωνα με τον τρόπο **i.** του προηγούμενου ερωτήματος, να γίνει η γραφική παράσταση του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος σφαίρα - δακτύλιος σε συνάρτηση με το χρόνο από τη χρονική στιγμή t_2= 6s και μέχρι τη χρονική στιγμή που αυτό ακινητοποιείται. **(Μονάδες 5)**

Απαντήσεις

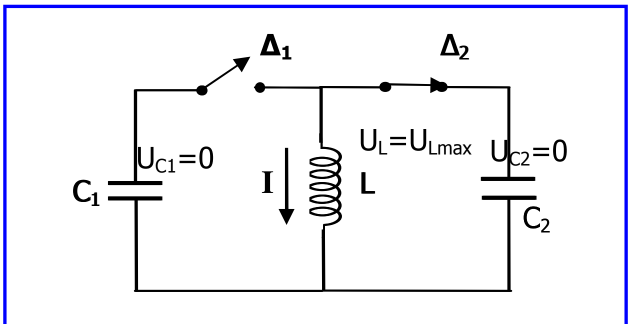
Θέμα 1ο

1.β 2.γ 3.α 4.β 5. α. Σωστό β. Λάθος γ. Λάθος δ. Σωστό ε. Λάθος

Θέμα 2ο

Α1. γ

Α2.Όταν τη χρονική στιγμή t=0 κλείνει ο διακόπτης $Δ_1$, το κύκλωμα L-C_1 εκτελεί αμείωτη ηλεκτρική ταλάντωση. Η ηλεκτρική ενέργεια του πυκνωτή χωρητικότητας C_1 μεταφέρεται στον αφόρτιστο πυκνωτή χωρητικότητας C_2 στον ελάχιστο χρόνο αν τη χρονική στιγμή



Σχήμα 1

$$t_1 = \frac{T_1}{4} = \frac{2\pi\sqrt{LC_1}}{4} \Rightarrow t_1 = \frac{\pi\sqrt{LC_1}}{2} \quad \textbf{(1)}$$

που η ηλεκτρική ενέργεια του πυκνωτή χωρητικότητας C_1 έχει μεταφερθεί στο ιδανικό πηνίο ως ενέργεια μαγνητικού πεδίου για πρώτη φορά, ανοίξουμε τον διακόπτη $Δ_1$ και ταυτόχρονα κλείσουμε το διακόπτη $Δ_2$. **(Σχήμα 1)**

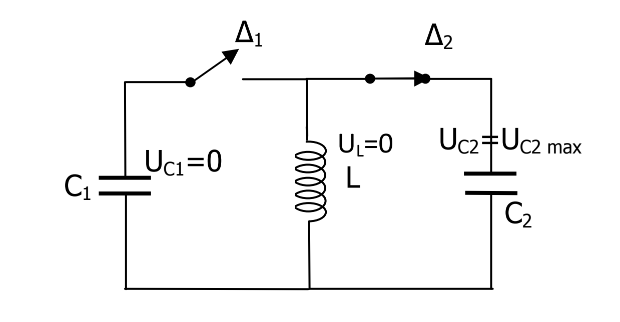
Στο νέο κύκλωμα αμείωτων ηλεκτρικών ταλαντώσεων L-C_2 που δημιουργείται, η ενέργεια του ιδανικού πηνίου μεταφέρεται στον αφόρτιστο πυκνωτή για πρώτη φορά τη χρονική στιγμή

$$t_2 = t_1 + \frac{T_2}{4} \overset{(1)}{\Rightarrow} t_2 = \frac{2\pi\sqrt{LC_1}}{4} + \frac{2\pi\sqrt{LC_2}}{4} \Rightarrow t_2 = \frac{\pi\sqrt{LC_1}}{2} + \frac{\pi\sqrt{LC_2}}{2} \quad \textbf{(2)} \quad \textbf{(Σχήμα 2)}$$

Άρα ο ελάχιστος χρόνος μεταφοράς της ενέργειας στον πυκνωτή χωρητικότητας C_2 αντιστοιχεί στο χρονικό διάστημα

$$\Delta t = t_2 - 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{3}{2}\pi\sqrt{LC_1} = \frac{\pi\sqrt{LC_1}}{2} + \frac{\pi\sqrt{LC_2}}{2}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{LC_1} = \sqrt{LC_2} \Rightarrow C_2 = 4C_1$$



Σχήμα 2

Β1. α

Β2.Όταν στη χορδή σχηματίζεται στάσιμο κύμα στα άκρα της σχηματίζονται δεσμοί.

Η συνθήκη σχηματισμού στάσιμου κύματος είναι:

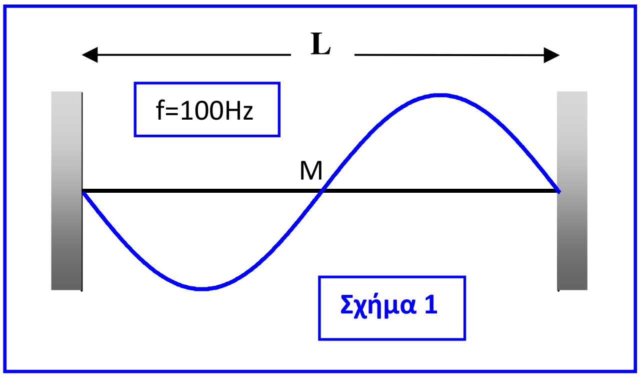
$$L = N\frac{\lambda}{2} \Rightarrow L = N\frac{\upsilon}{2f} \Rightarrow f = N\frac{\upsilon}{2L}, N \geq 1 \ \textbf{(1)}$$ N= ο αριθμός των κοιλιών ή των ατράκτων που σχηματίζονται στη χορδή.

Επειδή μεταξύ των συχνοτήτων των 250Hz και 300Hz δεν υπάρχει άλλη συχνότητα για την οποία να σχηματίζεται στάσιμο κύμα στη χορδή οι τιμές αυτές αντιστοιχούν σε διαδοχικές τιμές της παραμέτρου N, άρα

$$300 - 250 = N\frac{\upsilon}{2L} - (N-1)\frac{\upsilon}{2L} \Rightarrow 50 = \frac{\upsilon}{2L} \Rightarrow \frac{\upsilon}{L} = 100\ s^{-1} \ \textbf{(2)}$$

Όταν η συχνότητα διέγερσης της χορδής είναι f=100Hz από τις **(1)** και **(2)** :

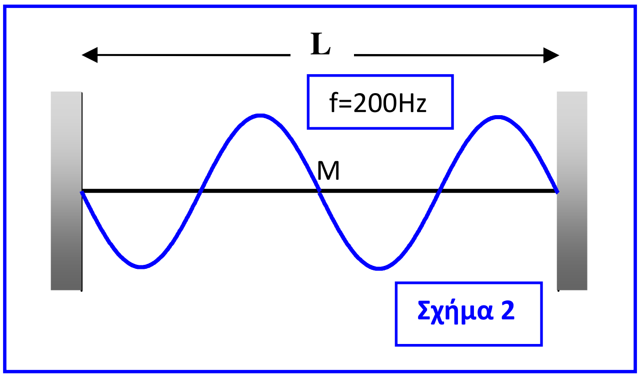
$100 = \frac{N}{2}100 \Rightarrow N = 2$. Η εικόνα της χορδής, όταν αυτή βρίσκεται σε κατάσταση μέγιστης δυναμικής ενέργειας είναι όπως φαίνεται στο στιγμιότυπο του **Σχήματος 1**.



Αντίστοιχα όταν η συχνότητα είναι f=200Hz από τις **(1)** και **(2)** :

$200 = \frac{N}{2}100 \Rightarrow N = 4$.

Η εικόνα της χορδής, όταν αυτή βρίσκεται σε κατάσταση μέγιστης δυναμικής ενέργειας είναι όπως φαίνεται στο στιγμιότυπο του **Σχήματος 2**.



Όπως προκύπτει από τα στιγμιότυπα της χορδής και στις δύο τιμές συχνότητας στο μέσο της M σχηματίζεται δεσμός.

Γ₁. β

Γ₂. Η ηχητική πηγή πλησιάζει τον παρατηρητή A και απομακρύνεται από τον παρατηρητή B, αυτό έχει ως συνέπεια να μειώνεται το μήκος κύματος του ήχου που ακούει ο παρατηρητής A και αντίστοιχα να αυξάνεται το μήκος κύματος του ήχου που ακούει ο παρατηρητής B σε σχέση με το μήκος κύματος λ_s του ήχου που εκπέμπει η ηχητική πηγή:

$$\lambda_A = \lambda_S - \upsilon_s T \Rightarrow \lambda_A = \lambda_S - \frac{\upsilon_s}{f_s} \ \textbf{(1)} \quad \text{και} \quad \lambda_B = \lambda_S + \upsilon_s T \Rightarrow \lambda_B = \lambda_S + \frac{\upsilon_s}{f_s} \ \textbf{(2)}$$

Από την αφαίρεση των **(1)** και **(2)** :

$$\lambda_B - \lambda_A = 2\frac{\upsilon_s}{f_s} \Rightarrow \Delta\lambda = 2\frac{\upsilon_s}{f_s} \Rightarrow \upsilon_s = \frac{f_s \cdot \Delta\lambda}{2} \Rightarrow \upsilon_s = \frac{\upsilon_{\eta\chi} \cdot \Delta\lambda}{2 \cdot \lambda_S}$$

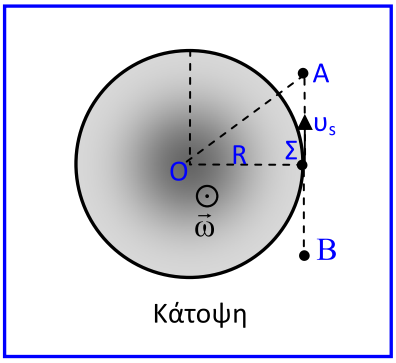
$$\Rightarrow \upsilon_s = \frac{340 \cdot \frac{1}{170}}{2 \cdot 0{,}5} \Rightarrow \upsilon_s = 2\, m/s \ \textbf{(3)}$$

Αν η ηχητική πηγή ήταν στο Ο θα ήταν ακίνητη και οι παρατηρητές θα άκουαν ήχο συχνότητας f_s στον οποίο θα αντιστοιχούσε μήκος κύματος λ_s, άρα (ΟΑ)=10 λ_s $\Rightarrow (OA) = 5m$ **(4)**.Η απόσταση (ΣΑ)=(ΣΒ)= $\frac{(AB)}{2} \Rightarrow (\Sigma A) = \frac{12 \cdot \lambda_s}{2} = 3m$ **(5)**.

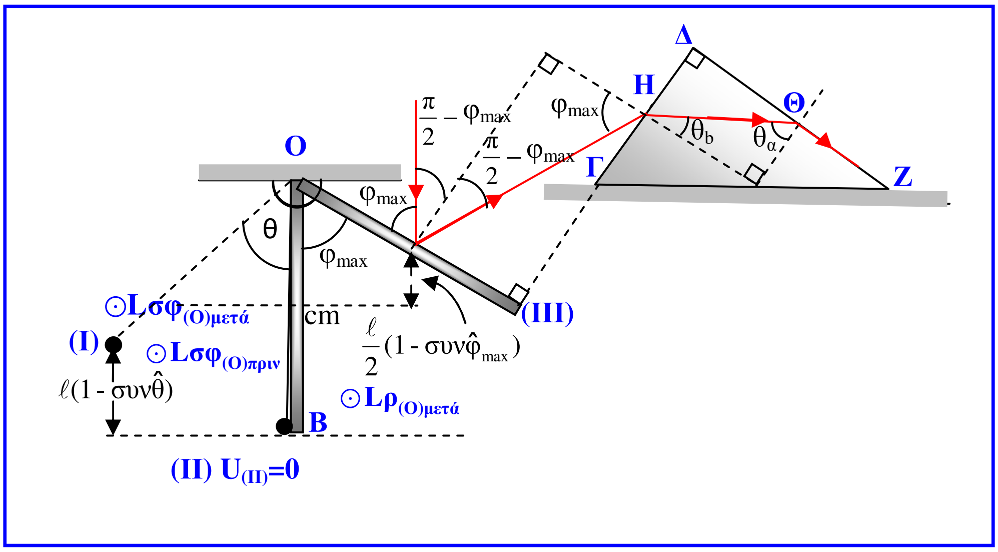
Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{O\Sigma A}$:

$$(OA)^2 = R^2 + (\Sigma A)^2 \Rightarrow R = \sqrt{(OA)^2 - (\Sigma A)^2} \overset{(4)}{\underset{(5)}{\Rightarrow}} R = 4m \ \textbf{(6)}.$$

Αλλά $\upsilon_s = \omega \cdot R \Rightarrow \omega = \frac{\upsilon_s}{R} \overset{(3)}{\underset{(6)}{\Rightarrow}} \omega = 0,5 rad/s$.



Θέμα 3ο



α_1. Κατά την κίνηση της σφαίρας από τη θέση εκτροπής της και μέχρι τη θέση που το νήμα γίνεται κατακόρυφο σ' αυτήν επιδρούν η βαρυτική δύναμη και η τάση του νήματος η οποία δεν εκτελεί έργο, επομένως η μηχανική της ενέργεια διατηρείται σταθερή. Θεωρούμε ως επίπεδο μηδενικής μηχανικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη θέση ΙΙ:

$$E_{M(I)} = E_{M(II)} \Rightarrow mg\ell(1 - \frac{2}{3}) = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow 2g\ell\frac{1}{3} = \upsilon^2 \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2g\ell}{3}} \ \textbf{(1)}$$

$$L_{\sigma\varphi,\pi\rho\iota\nu} = m\upsilon\ell \overset{(1)}{\Rightarrow} L_{\sigma\varphi,\pi\rho\iota\nu} = m\sqrt{\frac{2g\ell}{3}}\ell \ \textbf{(2)} \ \Rightarrow L_{\sigma\varphi,\pi\rho\iota\nu} = 0,2 \cdot 2 \cdot 0,6 = 0,24 Kg\frac{m^2}{s}$$

α_2. Κατά την κρούση της σφαίρας με την ράβδο στο σύστημα δεν επιδρούν εξωτερικές ροπές διότι οι ροπές των βαρυτικών δυνάμεων και της δύναμης από την άρθρωση ως προς το σημείο Ο είναι μηδέν. Επομένως, η στροφορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

$$L_{\underset{\text{την κρύση}}{ΟΛ(Ο)πριν}} = L_{\underset{\text{την κρύση}}{ΟΛ(Ο)μετά}} \Rightarrow m\upsilon\ell = m\upsilon'\ell + L_{\rho(O)} \Rightarrow \upsilon' = \upsilon - \frac{L_{\rho(O)}}{m\ell} \ \textbf{(3)}$$

Όπου υ' = η ταχύτητα της σφαίρας και $L_{\rho(O)}$ = η στροφορμή της ράβδου αμέσως μετά την κρούση.

Επειδή η κρούση είναι τελείως ελαστική η κινητική ενέργεια του συστήματος διατηρείται:

$$K_{πριν} = K_{μετά} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m\upsilon'^2 + \frac{L^2_{\rho(O)}}{2\frac{1}{3}M\ell^2} \overset{(3)}{\Rightarrow} m\upsilon^2 = m(\upsilon - \frac{L_{\rho(O)}}{m\ell})^2 + \frac{3L^2_{\rho(O)}}{M\ell^2} \Rightarrow$$

$$m\upsilon^2 = m\upsilon^2 + m\frac{L^2_{\rho(O)}}{m^2\ell^2} - 2m\frac{L_{\rho(O)}}{m\ell}\upsilon + \frac{3L^2_{\rho(O)}}{M\ell^2} \Rightarrow 0 = L_{\rho(O)}(\frac{L_{\rho(O)}}{m\ell} - 2\upsilon + \frac{3L_{\rho(O)}}{M\ell}) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} L_{\rho(O)} = 0 \text{ απορρίπτεται} \\ L_{\rho(O)} \overset{(1)}{=} \left(\dfrac{2mM}{3m+M}\right)\sqrt{\dfrac{2g\ell}{3}}\ell \end{cases}$$

$$\Rightarrow L_{\rho(O)} = \left(\frac{2\cdot 2\cdot 10^{-1}\cdot 2\cdot 10^{-1}}{4\cdot 2\cdot 10^{-1}}\right)2\cdot 0{,}6 \Rightarrow L_{\rho(O)} = 0{,}12 \ Kg\frac{m^2}{s}$$

α₃. Κατά την κίνηση της ράβδου μετά την κρούση, σ' αυτήν επιδρούν η βαρυτική δύναμη και η δύναμη από την άρθρωση η οποία δεν εκτελεί έργο, άρα η μηχανική της ενέργεια μέχρι αυτή να φτάσει στη θέση μέγιστης εκτροπής της από την κατακόρυφο (θέση ΙΙΙ) διατηρείται σταθερή

$$E_{M(II)} = E_{M(III)} \Rightarrow K_{(II)} = U_{(III)} \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{L^2_{\rho(O)}}{\frac{1}{3}M\ell^2} = Mg\frac{\ell}{2}(1 - \sigma\upsilon\nu\hat{\varphi}_{max}) \overset{(4)}{\Rightarrow}$$

$$3\frac{4m^2M^2}{(M+3m)^2}\cdot\frac{2g\ell}{3}\cdot\ell^2 = M^2g\ell^3(1 - \sigma\upsilon\nu\hat{\varphi}_{max}) \Rightarrow \frac{8m^2}{(M+3m)^2} = 1 - \sigma\upsilon\nu\hat{\varphi}_{max} \Rightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\hat{\varphi}_{max} = 1 - \frac{8m^2}{(M+3m)^2} \ \textbf{(5)} \overset{M=m}{\Rightarrow} \sigma\upsilon\nu\hat{\varphi}_{max} = 1 - \frac{8m^2}{16m^2} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\hat{\varphi}_{max} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{\varphi}_{max} = 60^o$$

β. Από το Νόμο του Snell στο Η: $n_{αερ}\eta\mu\hat{\varphi}_{max} = n\eta\mu\theta_b$ **(6)** διότι η γωνία πρόσπτωσης της ακτίνας στην πλευρά ΓΔ του πρίσματος είναι ίση με τη μέγιστη γωνία εκτροπής της ράβδου $\hat{\varphi}_{max}$ καθώς είναι συμπληρωματική της γωνίας ανακλάσεως της φωτεινής ακτίνας στη ράβδο που είναι $90^o - \hat{\varphi}_{max}$

Αλλά $\hat{\theta}_b = 90^o - \hat{\theta}_\alpha \Rightarrow \eta\mu\hat{\theta}_b = \sigma\upsilon\nu\hat{\theta}_\alpha$ **(7)**

Από **(6)** $\overset{(7)}{\Rightarrow} \eta\mu\hat{\varphi}_{max} = n\sigma\upsilon\nu\theta_\alpha \Rightarrow \eta\mu\hat{\varphi}_{max} = n\sqrt{1 - \eta\mu^2\theta_\alpha}$ **(8)**

Νόμος Snell στο Θ: $n\eta\mu\hat{\theta}_\alpha = n_{αερ}\eta\mu 90^o \Rightarrow \eta\mu\hat{\theta}_\alpha = \frac{1}{n}$ (άρα $\hat{\theta}_\alpha = \theta_{crit}$) **(9)**

$$\textbf{(8)}\overset{(9)}{\Rightarrow}\eta\mu\hat{\varphi}_{max}=n\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\overset{0<\varphi_{max}<\frac{\pi}{2}}{\Rightarrow}\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\hat{\varphi}_{max}}=\sqrt{n^2-1}\Rightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\varphi_{max}=2-n^2\overset{n=1,4}{\Rightarrow}\sigma\upsilon\nu^2\varphi_{max}=0,04\Rightarrow\sigma\upsilon\nu\varphi_{max}=0,2\overset{(5)}{\Rightarrow}1-\frac{8m^2}{(M+3m)^2}=0,2\Rightarrow$$

$$\frac{8m^2}{(M+3m)^2}=0,8\Rightarrow(\frac{m}{M+3m})^2=\frac{1}{10}\Rightarrow\frac{m}{M+3m}=\frac{1}{\sqrt{10}}\Rightarrow m\sqrt{10}=M+3m\Rightarrow$$

$$m(\sqrt{10}-3)=M\Rightarrow\frac{m}{M}=\frac{1}{\sqrt{10}-3}\Rightarrow\frac{m}{M}=\frac{1}{3,16-3}\Rightarrow\frac{m}{M}=\frac{1}{0,16}\Rightarrow\frac{m}{M}=\frac{100}{16}\Rightarrow$$

$$\frac{m}{M}=\frac{25}{4}\Rightarrow\frac{m}{M}=6,25.$$

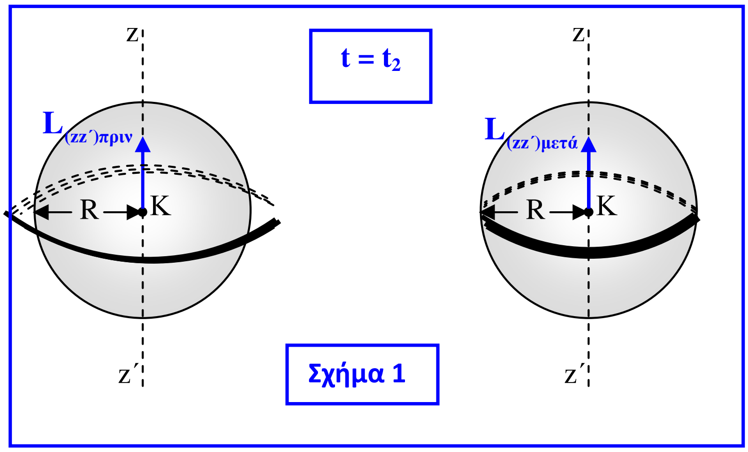
Θέμα 4^o

α. Από τον 2^o νόμο του Newton για την περιστροφική κίνηση της σφαίρας :

$F\cdot R=I_\Sigma\alpha_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow\alpha_{\gamma\omega\nu}=\dfrac{F\cdot R}{I_\Sigma}$ **(1)** .Η γωνιακή επιτάχυνση της σφαίρας είναι σταθερή , επομένως η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας τη χρονική στιγμή t_1 είναι :

$$\omega_1=\alpha_{\gamma\omega\nu}\,t_1\overset{(1)}{\Rightarrow}\omega_1=\frac{F\cdot R\cdot t_1}{I_\Sigma}\Rightarrow I_\Sigma=\frac{F\cdot R\cdot t_1}{\omega_1}\Rightarrow I_\Sigma=\frac{2\cdot 0,5\cdot 4}{10}\Rightarrow I_\Sigma=0,4\,Kg\cdot m^2\,\textbf{(2)}$$

β. Κατά την ένωση δακτυλίου – σφαίρας τη χρονική στιγμή $t=t_2$, **(Σχήμα 1)** το σύστημά τους δεν δέχεται την επίδραση εξωτερικών ροπών διότι οι ροπές των μοναδικών εξωτερικών δυνάμεων που είναι οι βαρυτικές δυνάμεις της σφαίρας και του δακτυλίου κατά τον άξονα zz΄είναι μηδέν, η στροφορμή του συστήματος κατά τον ένωση σφαίρας - δακτυλίου διατηρείται:



Σχήμα 1

$$L_{\underset{\text{την ένωση}}{OΛ(zz')\pi\rho\iota\nu}}=L_{\underset{\text{την ένωση}}{OΛ(zz')\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}}\Rightarrow$$

$$I_\Sigma\omega_1=(I_\Sigma+I_\Delta)\omega_2\Rightarrow\omega_2=\frac{I_\Sigma\omega_1}{(I_\Sigma+I_\Delta)}\overset{(2)}{\Rightarrow}\omega_2=\frac{0,4\cdot 10}{(0,4+0,1)}\Rightarrow\omega_2=8\frac{rad}{s}\;\textbf{(3)}$$

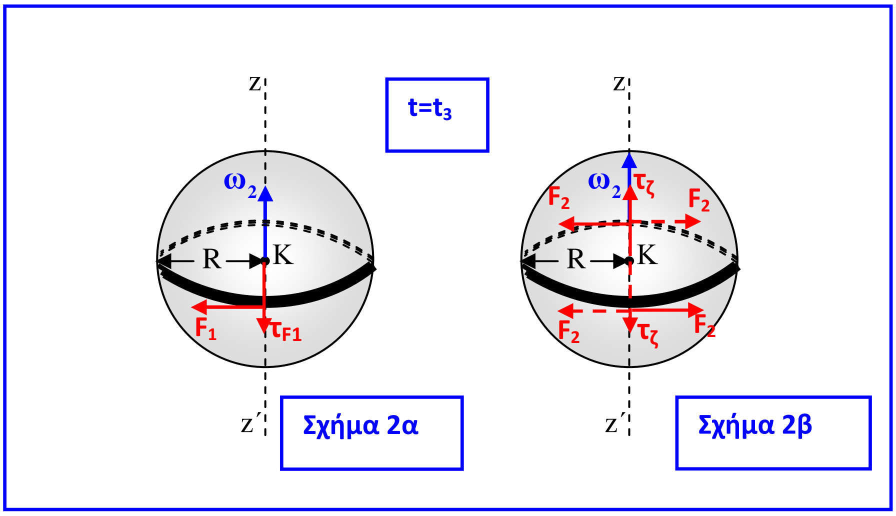
Όπου ω_2=το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος σφαίρα – δακτύλιος αμέσως μετά την ένωσή τους.

Το (%) ποσοστό της μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος κατά την δημιουργία του είναι:

$$\Pi(\%)=\frac{K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}-K_{\pi\rho\iota\nu}}{K_{\pi\rho\iota\nu}}100\%\Rightarrow\Pi(\%)=\frac{\frac{1}{2}(I_\Sigma+I_\Delta)\omega_2^2-\frac{1}{2}I_\Sigma\omega_1^2}{\frac{1}{2}I_\Sigma\omega_1^2}100\%\overset{(2)}{\underset{(3)}{\Rightarrow}}$$

$$\Pi(\%)=\frac{0{,}5\cdot 8^2-0{,}4\cdot 10^2}{0{,}4\cdot 10^2}100\%\Rightarrow\Pi(\%)=-20\%$$

γ.



Στην περίπτωση που επιλέξουμε να ακινητοποιήσουμε το σύστημα μέσω της ροπής της δύναμης F_1 **(Σχήμα 2 α)** :

Από τον 2^{o} νόμο του Newton για την περιστροφική κίνηση του συστήματος σφαίρα – δακτύλιος:

$$F_1\cdot R=(I_\Sigma+I_\Delta)\alpha_{\gamma\omega\nu,1}\Rightarrow F_1\cdot R=(I_\Sigma+I_\Delta)\alpha_{\gamma\omega\nu,1}\Rightarrow\alpha_{\gamma\omega\nu,1}=\frac{F_1\cdot R}{(I_\Sigma+I_\Delta)}\overset{(2)}{\Rightarrow}\alpha_{\gamma\omega\nu,1}=\frac{2\cdot 0{,}5}{0{,}5}$$

$\Rightarrow\alpha_{\gamma\omega\nu,1}=2\frac{rad}{s^2}$ **(4)**. Η γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος είναι σταθερή , επομένως η γωνιακή ταχύτητα του μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$\omega=\omega_2-\alpha_{\gamma\omega\nu,1}(t-8)\Rightarrow 0=\omega_2-\alpha_{\gamma\omega\nu,1}(t_{o\lambda,1}-8)\Rightarrow t_{o\lambda,1}-8=\frac{\omega_2}{\alpha_{\gamma\omega\nu,1}}\overset{(3)}{\underset{(4)}{\Rightarrow}}t_{o\lambda,1}=12s\ \textbf{(5)}$$

Στην περίπτωση που επιλέξουμε να ακινητοποιήσουμε το σύστημα μέσω της ροπής του ζεύγους μέτρου δυνάμεων F_2 **(Σχήμα 2 β)** :

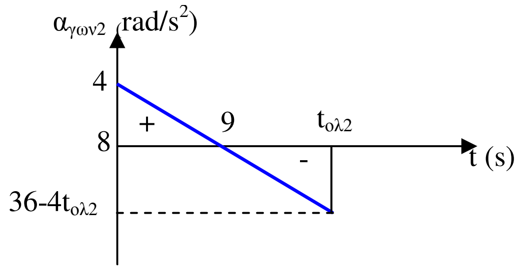
Από τον 2^{o} νόμο του Newton για την περιστροφική κίνηση του συστήματος σφαίρα – δακτύλιος:

$$F_2\cdot 2R=(I_\Sigma+I_\Delta)\alpha_{\gamma\omega\nu,2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\alpha_{\gamma\omega\nu,2}=\frac{F_2\cdot 2R}{(I_\Sigma+I_\Delta)}\overset{(2)}{\Rightarrow}\alpha_{\gamma\omega\nu,2}=\frac{(18-2t)\cdot 2\cdot 0{,}5}{0{,}5}\Rightarrow\alpha_{\gamma\omega\nu,2}=36-4t\ (S.I)\ \mu\varepsilon\ t\geq 8s$$

Το σύστημα ακινητοποιείται τη χρονική στιγμή $t_{ολ,2}$ κατά την οποία η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος μηδενίζεται.

Το εμβαδόν στο διπλανό διάγραμμα αντιστοιχεί στην μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας Δω:



$$Δω=\frac{1}{2}(9-8)\cdot 4+\frac{1}{2}(t_{ολ,2}-9)(36-4t_{ολ,2})\Rightarrow 0-8=2-\frac{1}{2}(-324+72t_{ολ,2}-4t^2_{ολ,2})\Rightarrow t^2_{ολ,2}-18t_{ολ,2}+76=0\Rightarrow$$

$$\begin{cases} t_{ολ,2}=9-\sqrt{5}\,s<8s \text{ απορρίπτεται} \\ t_{ολ,2}=9+\sqrt{5}\,s \ <12s \end{cases} \quad \textbf{(6)}$$

Από **(5)** και **(6)** προκύπτει ότι το σύστημα σφαίρας – δακτυλίου ακινητοποιείται σε μικρότερο χρόνο στην περίπτωση **ii.**

δ. Στο χρονικό διάστημα $6s \ \le t \ \le 8s$ στο σύστημα δεν επιδρά κάποια ροπή , επομένως η κινητική του ενέργεια διατηρείται σταθερή και $\frac{dK}{dt}=0$.

Στο χρονικό διάστημα $8s \ \le t \ \le 12s$ στο σύστημα επιδρά η ροπή της δύναμης μέτρου F_1 η οποία και το επιβραδύνει:

$$\frac{dK}{dt}=-F_1\cdot R\cdot ω\Rightarrow\frac{dK}{dt}=-F_1\cdot R\left[ω_2-α_{γων,1}(t-8)\right]\underset{(4)}{\overset{(3)}{\Rightarrow}}\frac{dK}{dt}=-2\cdot 0{,}5\left[8-2(t-8)\right]$$

$\Rightarrow\frac{dK}{dt}=-24+2t$ (S.I) . Η ζητούμενη γραφική παράσταση φαίνεται στο επόμενο διάγραμμα: