

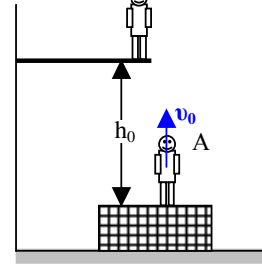
## Ορμή – Δεύτερος Νόμος, Διατήρηση της Ορμής – Τρίτος Νόμος Εφαρμογές

### Εφαρμογή 1<sup>η</sup>

Ένας ακροβάτης A μάζας  $m_A$  με τη βοήθεια ενός τραμπολίνου πηδάει κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα μέτρου  $v_0 = 2\sqrt{gh_0}$ . Ανερχόμενος σε ύψος  $h_0$  αρπάζει έναν άλλο ακροβάτη B μάζας  $m_B$  που στέκεται ακίνητος. Αν η διάρκεια της αρπαγής – συνένωσης των δύο ακροβατών θεωρηθεί αμελητέα,

**α.** να υπολογιστεί το ύψος  $h$  στο οποίο φθάνουν οι ακροβάτες από το τραμπολινό.

**β.** ποιο θα ήταν το ύψος αυτό αν οι ακροβάτες είχαν ίσες μάζες; Δίνονται  $m_A$ ,  $m_B$ ,  $h_0$  και  $g$ .

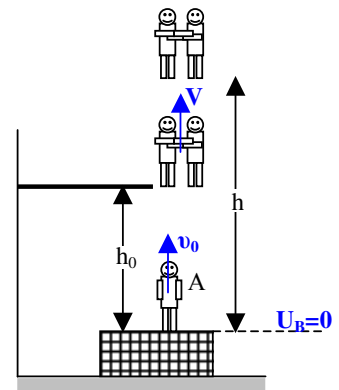


### Λύση

**α.** Ο ακροβάτης A φθάνει στη θέση που βρίσκεται ο ακροβάτης B με ταχύτητα  $v$  κινούμενος υπό την επίδραση της βαρυτικής δύναμης, επομένως η μηχανική του ενέργεια διατηρείται (ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής θεωρούμε το οριζόντιο επίπεδο που περνάει από την επιφάνεια του τραμπολίνου):

$$\frac{1}{2} m_A v_0^2 + 0 = m_A g h_0 + \frac{1}{2} m_A v^2 \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - 2gh_0} \quad (1)$$

Οι δύο ακροβάτες κατά τη διάρκεια της συνένωσής τους θεωρούνται ως μονωμένο σύστημα, αφού η διάρκεια της αρπαγής του B από τον A θεωρείται αμελητέα και οι ωθήσεις των βαρυτικών δυνάμεων αμελούνται. Η ορμή του συστήματος διατηρείται:



$$m_A \vec{v} + \vec{0} = (m_A + m_B) \vec{V} \Rightarrow V = \frac{m_A v}{m_A + m_B} \xrightarrow{(1)} V = \frac{m_A \sqrt{v_0^2 - 2gh_0}}{m_A + m_B} \Rightarrow$$

$$V = \frac{m_A \sqrt{4gh_0 - 2gh_0}}{m_A + m_B} \Rightarrow V = \frac{m_A \sqrt{2gh_0}}{m_A + m_B} \quad (2)$$

Όπου  $V =$  η ταχύτητα των συνενωμένων πλέον ακροβατών.

Κατά τη διάρκεια της συνένωσης υπάρχει απώλεια μηχανικής ενέργειας. Οι δύο ακροβάτες μετά την συνένωσή τους κινούνται προς τα πάνω υπό την επίδραση μόνον της βαρυτικής δύναμης και φθάνουν σε ύψος  $h$  από το τραμπολινό, από τη διατήρηση της μηχανικής τους ενέργειας :

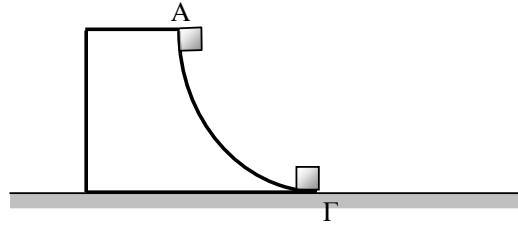
$$\frac{1}{2} (m_A + m_B) V^2 + (m_A + m_B) g h_0 = (m_A + m_B) g h \Rightarrow h = h_0 + \frac{V^2}{2g} \xrightarrow{(2)} h = h_0 + \frac{2m_A^2 g h_0}{2g(m_A + m_B)^2}$$

$$\Rightarrow h = h_0 + \frac{m_A^2 h_0}{(m_A + m_B)^2} \quad (3)$$

**β.** Αν  $m_A = m_B$  από τη σχέση (3):  $h = \frac{5h_0}{4}$ .

### Εφαρμογή 2<sup>η</sup>

Ο μικρός κύβος μάζας  $m_1$  μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές πάνω στη σιδηρογωνία μάζας  $m_2$  η οποία αρχικά ηρεμεί πάνω στο λείο οριζόντιο δάπεδο. Αφήνουμε από την ηρεμία τον κύβο να κινηθεί πάνω στο τεταρτοκύκλιο ακτίνας  $R$  που έχει διαμορφωθεί στη σιδηρογωνία.

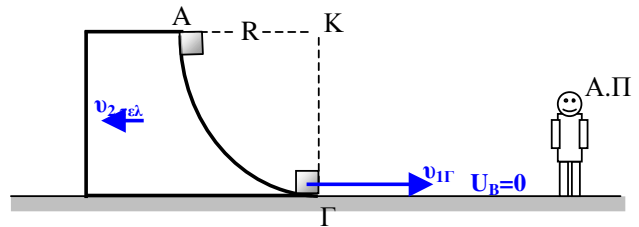


Να υπολογιστούν:

- α. η ταχύτητα του κύβου, όταν αυτός εγκαταλείπει τη σιδηρογωνία στη θέση Γ.
- β. το μέτρο της κατακόρυφης δύναμης που δέχεται ο κύβος από τη σιδηρογωνία, όταν βρίσκεται λίγο πριν τη θέση Γ. Δίνονται:  $m_1$ ,  $m_2=3m_1$ ,  $R$  και  $g$ .

### Λύση

α. Στο σύστημα των δύο σωμάτων δεν επιδρούν εξωτερικές δυνάμεις κατά την οριζόντια διεύθυνση, άρα είναι μονωμένο και η ορμή του στην οριζόντια διεύθυνση διατηρείται. Αν  $v_{1Γ}$  και  $v_{2,τελ}$  είναι οι ταχύτητες του κύβου και της σιδηρογωνίας αντίστοιχα, όταν ο κύβος φθάνει στη θέση Γ και η ταχύτητά του γίνεται οριζόντια :

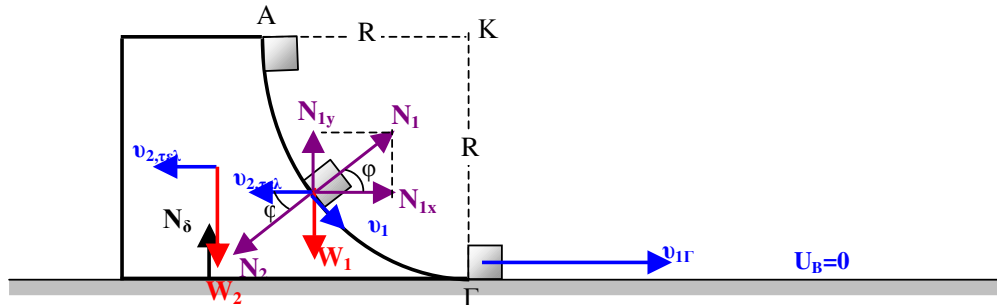


(Σχήμα 1)

$$\vec{0} + \vec{0} = m_1 \vec{v}_{1Γ} + m_2 \vec{v}_{2,τελ} \Rightarrow 0 = m_1 v_{1Γ} - m_2 v_{2,τελ} \quad *$$

$$\Rightarrow v_{2,τελ} = \frac{m_1 v_{1Γ}}{m_2} \quad m_2=3m_1 \Rightarrow v_{2,τελ} = \frac{v_{1Γ}}{3} \quad (1)$$

\* Όταν μεταξύ των σωμάτων – μελών ενός μονωμένου συστήματος υπάρχει σχετική κίνηση, τότε οι ταχύτητες και οι ορμές όλων των σωμάτων **πρέπει** να εκφράζονται( υπολογίζονται) ως προς **το ίδιο σύστημα αναφοράς** που είναι το ακίνητο έδαφος – ο ακίνητος παρατηρητής (Α.Π).



(Σχήμα 2)

Κατά τη διάρκεια της κίνησης του κύβου πάνω στη σιδηρογωνία στο σύστημα επιδρούν οι εξής δυνάμεις: οι βαρυτικές δυνάμεις κύβου και σιδηρογωνίας  $\vec{W}_1$  και  $\vec{W}_2$  αντίστοιχα, η κατακόρυφη αντίδραση  $\vec{N}_\delta$  του λείου δαπέδου στη σιδηρογωνία και οι εσωτερικές δυνάμεις του συστήματος, δυνάμεις επαφής μεταξύ κύβου και σιδηρογωνίας  $\vec{N}_1$  και  $\vec{N}_2$  οι οποίες έχουν σχέση δράσης αντίδρασης  $\vec{N}_1 = -\vec{N}_2$ .

Η δύναμη  $\vec{W}_1$  είναι συντηρητική, οι δυνάμεις  $N_\delta$  και  $\vec{W}_2$  είναι κάθετες στη διεύθυνση κίνησης της σιδηρογωνίας και δεν εκτελούν έργο, τα έργα των δυνάμεων  $\vec{N}_1$  και  $\vec{N}_2$  είναι αντίθετα (αλληλοαναιρούνται) διότι:

Η ολική ταχύτητα του κύβου κατά τη διάρκεια της κίνησής του πάνω στη σιδηρογωνία ως προς τον ακίνητο παρατηρητή (Α.Π) αναλύεται στην ταχύτητα  $v_1$  του κύβου (ίδια ταχύτητα) και στην ταχύτητα της σιδηρογωνίας  $v_2$  καθώς μετέχει στην κίνησή της.

Αντίστοιχα μια στοιχειώδης μετατόπιση του κύβου  $\vec{\Delta x}$  αναλύεται σε δύο μετατοπίσεις  $\vec{\Delta x}_1$  και  $\vec{\Delta x}_2$  ( $\vec{\Delta x} = \vec{\Delta x}_1 + \vec{\Delta x}_2$ ) στις διευθύνσεις των ταχυτήτων  $\vec{v}_1$  και  $\vec{v}_2$  αντίστοιχα. Το στοιχειώδες έργο της  $\vec{N}_1$  είναι :

$$\Delta W_{N_1} = N_1 \Delta x_1 \sin 90^\circ + N_{1x} \Delta x_2 \sin 180^\circ + N_{1y} \Delta x_2 \sin 90^\circ = -N_1 \Delta x_2 \sin \hat{\phi} \quad (2)$$

Το στοιχειώδες έργο της  $\vec{N}_2$  είναι :

$$\Delta W_{N_2} = N_2 \Delta x_2 \sin \hat{\phi} \quad \overset{N_1=N_2}{\Rightarrow} \quad \Delta W_{N_2} = N_1 \Delta x_2 \sin \hat{\phi} \quad (3)$$

Από (2) και (3):  $\Delta W_{N_1} = -\Delta W_{N_2}$

Λόγω των προηγούμενων συμπερασμάτων σε σχέση με τα έργα των δυνάμεων, η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται (ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής θεωρούμε το οριζόντιο δάπεδο):

$$m_1 g R + U_{B(\text{σιδ/νιας})} = U_{B(\text{σιδ/νιας})} + \frac{1}{2} m_1 v_{1\Gamma}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,\text{τελ}}^2 \Rightarrow 2m_1 g R = m_1 v_{1\Gamma}^2 + m_2 v_{2,\text{τελ}}^2 \quad \overset{m_2=3m_1}{\Rightarrow}$$

$$2gR = v_{1\Gamma}^2 + 3v_{2,\text{τελ}}^2 \quad \overset{(1)}{\Rightarrow} 2gR = v_{1\Gamma}^2 + 3 \frac{v_{1\Gamma}^2}{9} \Rightarrow 2gR = \frac{4v_{1\Gamma}^2}{3} \Rightarrow v_{1\Gamma}^2 = \frac{3gR}{2} \Rightarrow v_{1\Gamma} = \sqrt{\frac{3gR}{2}} \quad (4)$$

**β.** Η κεντρομόλος δύναμη που δέχεται ο κύβος στη θέση Γ είναι:

$$F_{K\Gamma} = N_\Gamma - m_1 g \Rightarrow \frac{m_1 (v_{1\Gamma} + v_{2,\text{τελ}})^2}{R} + m_1 g = N_\Gamma \quad \overset{(1)}{\Rightarrow} N_\Gamma = \frac{m_1}{R} \left( \frac{4v_{1\Gamma}}{3} \right)^2 + m_1 g \Rightarrow$$

$$N_\Gamma = \frac{m_1}{R} \cdot \frac{16v_{1\Gamma}^2}{9} + m_1 g \quad \overset{(4)}{\Rightarrow} N_\Gamma = \frac{16}{9} \cdot \frac{m_1}{R} \cdot \frac{3gR}{2} + m_1 g \Rightarrow N_\Gamma = \frac{8}{3} m_1 g + m_1 g \Rightarrow N_\Gamma = \frac{11}{3} m_1 g$$

### Εφαρμογή 3<sup>η</sup>

Τα σώματα μαζών  $m_1$  και  $m_2$  έχουν ενσωματωμένες μικρές μεταλλικές επιφάνειες που είναι θετικά φορτισμένες με φορτίο  $+q$  η κάθε μία και

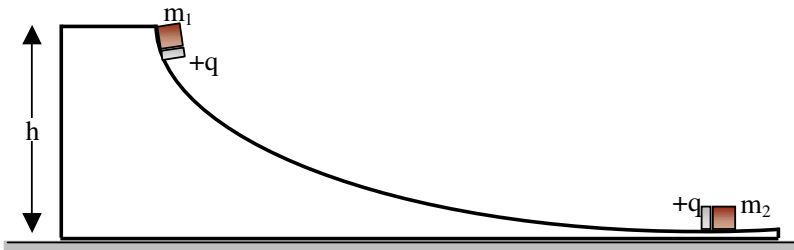
προεξέχουν ώστε να

βρίσκονται η μία απέναντι στην άλλη. Τα σώματα μπορούν να κινούνται χωρίς τριβές πάνω στην ξύλινη τροχιά του σχήματος η οποία είναι πακτωμένη. Αφήνουμε το σώμα μάζας  $m_1$  ελεύθερο από ύψος  $h=0,4$  m και αυτό κατέρχεται, ενώ το σώμα μάζας  $m_2$  αρχικά ηρεμεί πάνω στο οριζόντιο τμήμα της τροχιάς. Τα φορτία αρχίζουν να αλληλεπιδρούν (αλληλοαπωθούνται), όταν το σώμα μάζας  $m_1$  αρχίσει να κινείται στο οριζόντιο τμήμα της τροχιάς με αποτέλεσμα το σώμα μάζας  $m_2$  να αρχίσει να κινείται. Τα δύο σώματα δεν έρχονται ποτέ σε επαφή και το σώμα μάζας  $m_1$ , αφού κινηθεί στο οριζόντιο τμήμα της τροχιάς επιστρέφει ανερχόμενο στο καμπύλο τμήμα της.

Η αλληλεπίδραση των δύο σωμάτων προσομοιάζει με μια «ελαστική κρούση» και ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα λόγω της κίνησης των φορτισμένων επιφανειών αμελούνται.

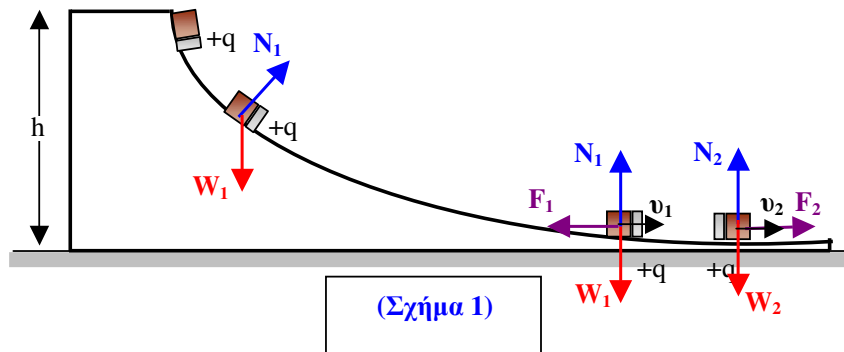
**α.** Να υπολογιστεί το ύψος  $h_1$  στο οποίο φθάνει το σώμα μάζας  $m_1$ . Δίνονται  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $h$ .

**β.** Να υπολογιστεί η τιμή του ύψους  $h_1$  όταν : **i.**  $m_2=3 m_1$  **ii.**  $m_2= m_1$  **iii.**  $m_2 \gg m_1$ .



### Λύση

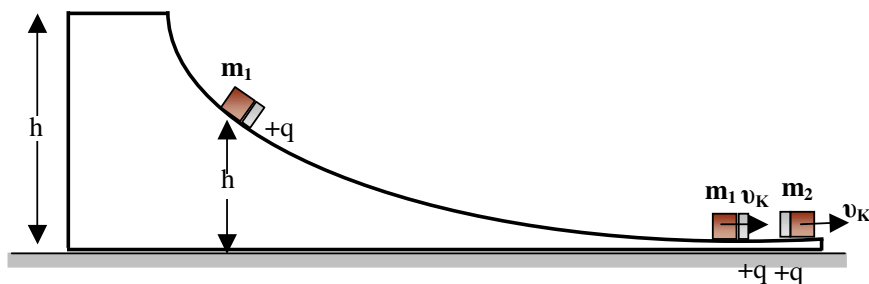
**α.**



Το σώμα μάζας  $m_1$  κινείται στο καμπυλόγραμμο τμήμα της τροχιάς με την επίδραση της βαρυτικής συντηρητικής δύναμης  $\vec{W}_1$  και της αντίδρασης της τροχιάς  $\vec{N}_1$  η οποία είναι κάθετη στη διεύθυνση της κίνησης και δεν εκτελεί έργο. Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας του σώματος  $m_1$  (ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας θεωρούμε το οριζόντιο δάπεδο):

$$m_1 g h = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh} \quad (1)$$

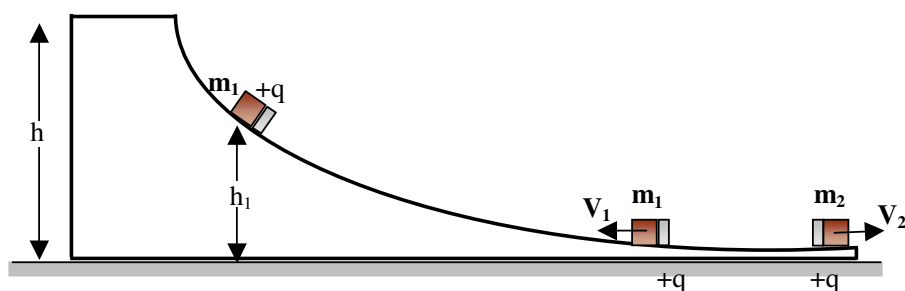
Η αλληλεπίδραση των μαγνητών αρχίζει, όταν το σώμα μάζας  $m_1$  αρχίσει να κινείται στο οριζόντιο τμήμα της τροχιάς (Σχήμα 1).



(Σχήμα 2)

Το σώμα μάζας  $m_1$  επιβραδύνεται από την ηλεκτρική δύναμη  $F_1$  ενώ το σώμα μάζας  $m_2$  επιταχύνεται από την αντίδρασή της  $F_2$ .

Τα δύο σώματα θα βρεθούν στην ελάχιστη μεταξύ τους απόσταση, όταν τα μέτρα των ταχυτήτων τους γίνουν ίσα  $v_1 = v_2 = v_k$  (Σχήμα 2).



(Σχήμα 3)

Στη συνέχεια το σώμα μάζας  $m_2$  θα απομακρύνεται από το σώμα μάζας  $m_1$  το οποίο κάποια στιγμή θα ακινητοποιηθεί στιγμιαία και αμέσως μετά θα αρχίσει να επιταχύνεται προς τα αριστερά κινούμενο προς το καμπύλο τμήμα της τροχιάς (Σχήμα 3).

Αν  $V_1$  και  $V_2$  είναι τα μέτρα των ταχυτήτων των δύο σωμάτων, όταν το σώμα μάζας  $m_1$  αρχίζει να κινείται πάλι στο καμπυλόγραμμο τμήμα της τροχιάς, τότε επειδή το σύστημα των δύο σωμάτων είναι μονωμένο (η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδέν), η ορμή του διατηρείται σταθερή:

$$\vec{P}_{\text{ολ.θέσεις σχήματος 1}} = \vec{P}_{\text{ολ.θέσεις σχήματος 3}} \Rightarrow m_1 v_1 = -m_1 V_1 + m_2 V_2 \quad (2)$$

Οι δυνάμεις  $N_1$ ,  $W_1$ ,  $N_2$ ,  $W_2$  είναι κάθετες στη διεύθυνση κίνησης των σωμάτων και δεν εκτελούν έργο, τα έργα των συντηρητικών ηλεκτρικών δυνάμεων  $F_1$  και  $F_2$  από τις θέσεις των φορτίων στο Σχήμα 1, όπου αυτά εισέρχονται το ένα μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο του άλλου, και μέχρι να βρεθούν στις θέσεις που φαίνονται στο Σχήμα 3 είναι μηδέν (η Δυναμική ηλεκτρική ενέργεια του συστήματος των δύο φορτίων μηδενίζεται), επομένως η

ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων διατηρείται σταθερή. Αν ορίσουμε το επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής στο οριζόντιο δάπεδο):

$$E_{\text{στις θέσεις σχήματος 1}} = E_{\text{στις θέσεις σχήματος 3}} \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m V_2^2 \quad (3)$$

$$\text{Από τις (2) και (3): } V_1 = \frac{(m_1 - m_2) v_1}{m_1 + m_2} \quad (4) \text{ και } V_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \quad (5)$$

Από τη διατήρηση της Μηχανικής ενέργειας του σώματος  $m_1$ , όταν αυτό αρχίσει να ανέρχεται στο καμπυλόγραμμο τμήμα της τροχιάς έχουμε:  $m_1 g h_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 \Rightarrow h_1 = \frac{V_1^2}{2g}$

$$\Rightarrow h_1 = \frac{V_1^2}{2g} \stackrel{(4)}{\Rightarrow} h_1 = \frac{(m_1 - m_2)^2 v_1^2}{2g(m_1 + m_2)^2} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} h_1 = \frac{(m_1 - m_2)^2 2gh}{2g(m_1 + m_2)^2} \Rightarrow h_1 = \frac{(m_1 - m_2)^2 h}{(m_1 + m_2)^2} \quad (6)$$

**β.** Από τη σχέση (6):

**i.** Αν  $m_2 = 3 m_1$  :  $h_1 = \frac{h}{4}$

**ii.** Αν  $m_2 = m_1$  :  $h_1 = 0$ , το σώμα  $m_1$  ακινητοποιείται στο τέλος της «ελαστικής κρούσης», δηλαδή στο τέλος της επιβραδυνόμενης κίνησής του και δεν επιστρέφει στο καμπυλόγραμμο τμήμα της τροχιάς.

**iii.** Αν  $m_2 \gg m_1$  :  $h_1 = \frac{(m_1 - m_2)^2 h}{(m_1 + m_2)^2}$   $h_1 = \frac{(m_1 - m_2)^2 h}{(m_1 + m_2)^2}$ , το πολύ βαρύ σώμα μάζας  $m_2$  δεν μετακινείται  $V_2 = 0$  (από την (5)) παρά την επίδραση της ηλεκτρικής δύναμης  $F_2$  με αποτέλεσμα το σώμα μάζας  $m_2$  να «ανακλάται» και με την ίδια ταχύτητα  $V_1 = v_1$  (από την (4)) και να επιστρέφει στην αρχική του θέση.

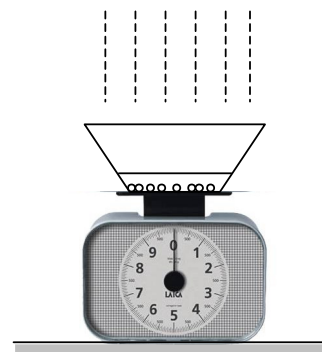
#### Εφαρμογή 4<sup>η</sup>

Ποσότητα νερού πέφτει από ύψος  $h=1,25$  m με ρυθμό  $\lambda=0,25$  Kg/s μέσα σε αρχικά άδειο κουβά μάζας  $M=0,75$  Kg, χωρίς να αναπηδά. Ο κουβάς είναι τοποθετημένος πάνω σε ζυγαριά.

**α.** Να υπολογιστεί η ταχύτητα του νερού, όταν αυτό κτυπάει στον πυθμένα του κουβά.

**β.** Αν  $t_0=0$  η χρονική στιγμή που αρχίζει να γεμίζει με νερό ο κουβάς, να υπολογίσετε την ένδειξη της ζυγαριάς σε συνάρτηση με το χρόνο.

**γ.** Να υπολογιστεί η μάζα του νερού που υπάρχει στον κουβά, όταν η ένδειξη της ζυγαριάς είναι 30N. Δίνεται  $g=10$  m/s<sup>2</sup>.



### Λύση

α. Για μια μάζα νερού  $m$  που πέφτει από ύψος  $h$  από τον κουβά και κινείται με την επίδραση της βαρυτικής δύναμης, η μηχανική ενέργεια διατηρείται:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = 5 \frac{m}{s} \quad (1)$$

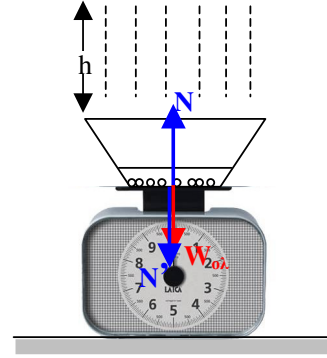
β. Στο σύστημα κουβάς - νερό επιδρούν η **εκάστοτε** βαρυτική δύναμη  $\vec{W}_{ολ}$  η οποία μετά από χρονικό διάστημα  $\Delta t$  από τη χρονική στιγμή  $t_0=0$  αντιστοιχεί σε μάζα  $M+\lambda\Delta t$  - καθώς το νερό που συλλέγεται στον κουβά αυξάνει - και η δύναμη  $\vec{N}$  από την ζυγαριά. Από τον 2<sup>ο</sup> Νόμο έχουμε:

$$\vec{W}_{ολ} + \vec{N} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{W}_{ολ} - \vec{N} = \frac{0 - \lambda\Delta t v}{\Delta t} \Rightarrow N = (M + \lambda\Delta t)g + \lambda v$$

$$\Rightarrow N = Mg + \lambda g(t - 0) + \lambda v \Rightarrow N = Mg + \lambda v + \lambda g t \Rightarrow N = 0,75 \cdot 10 + 0,25 \cdot 5 + 0,25 \cdot 10 \cdot t$$

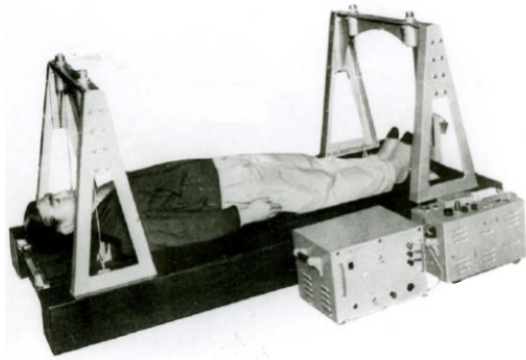
$$\Rightarrow N = 8,75 + 2,5t \text{ (S.I.)} \quad (2)$$

γ. Η ένδειξη της ζυγαριάς κάθε χρονική στιγμή αντιστοιχεί στο μέτρο της δύναμης  $\vec{N}'$  που ασκεί ο κουβάς στη ζυγαριά και είναι η αντίδραση της δύναμης  $\vec{N}$  ( $\vec{N}' = -\vec{N}$ ), άρα έχουν το ίδιο μέτρο  $N = N'$ . Από τη (2) :  $30 = 8,75 + 2,5t \Rightarrow t = 8,5s$ . Η μάζα του νερού που υπάρχει στον κουβά τη χρονική στιγμή  $t=8,5s$  είναι:  $m = \lambda t = 0,25 \frac{Kg}{s} \cdot 8,5s = 2,125Kg$ .



### Εφαρμογή 5<sup>η</sup>

Σε έναν καρδιολογικό έλεγχο συχνά είναι σημαντικό να γνωρίζουμε τη μάζα του αίματος που διοχετεύει η καρδιά ενός ανθρώπου ανά παλμό. Ένας τρόπος προσδιορισμού είναι και το βαλλιστοκαρδιογράφημα (ballistocardiograph - BCG). Ο τρόπος λειτουργίας της διάταξης που χρησιμοποιείται είναι ο εξής: το υπό εξέταση άτομο ξαπλώνει σε μία οριζόντια πλατφόρμα η οποία επιπλέει σε λεπτό στρώμα αέρα. Η τριβή που δέχεται η πλατφόρμα θεωρείται αμελητέα. Το σύστημα αρχικά ισορροπεί. Όταν η καρδιά



πάλλεται εξωθεί μία μάζα αίματος  $m$  στην αορτή με ταχύτητα μέτρου  $v$  και το σύστημα άνθρωπος - πλατφόρμα κινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση με ταχύτητα μέτρου  $V$ . Σε κάποια εφαρμογή η ταχύτητα του αίματος υπολογίστηκε με άλλο τρόπο (υπέρηχο - Doppler) και βρέθηκε  $v=0,6m/s$ . Το σύστημα πλατφόρμα - άνθρωπος έχει μάζα  $M=60Kg$  και σε χρονική διάρκεια  $\Delta t=0,16s$  μετά από ένα τυπικό παλμό κινήθηκε κατά  $\Delta x=6 \cdot 10^{-5} m$ .

α. Να υπολογίσετε τη μάζα του αίματος που διοχετεύθηκε από την καρδιά.

β. Να επαναληφθεί ο προηγούμενος υπολογισμός αν θεωρήσουμε ότι το σύστημα άνθρωπος - πλατφόρμα δέχεται την επίδραση τριβής σταθερού μέτρου.

Να θεωρήσετε ότι η ζητούμενη μάζα του αίματος είναι αμελητέα σε σχέση με τη μάζα του συστήματος άνθρωπος - πλατφόρμα.

### Λύση

α. Το σύστημα άνθρωπος – πλατφόρμα – ποσότητα αίματος που εξωθείται ανά παλμό θεωρείται μονωμένο, αν  $\vec{v}_a$  = η ταχύτητα του αίματος που εξωθεί η καρδιά και

$\vec{V}$  = η ταχύτητα του συστήματος άνθρωπος – πλατφόρμα, από τη διατήρηση της ορμής έχουμε:

$$\vec{0} + \vec{0} = m_a \vec{v}_a + M\vec{V} \Rightarrow 0 = m_a v_a - MV \Rightarrow$$

$$m_a = \frac{MV}{v_a} \quad (1).$$

Το μέτρο της ταχύτητας  $V$  αν αυτή θεωρηθεί σταθερή κατά τη διάρκεια της πολύ μικρής μετατόπισης της πλατφόρμας υπολογίζεται από τη σχέση:

$$V = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow V = \frac{6 \cdot 10^{-5}}{16 \cdot 10^{-2}} \Rightarrow V = \frac{3}{8} 10^{-3} \text{ m/s} \quad (2).$$

$$\text{Από (1)} \Rightarrow m_a = \frac{60 \cdot \frac{3}{8} \cdot 10^{-3}}{0,6} \Rightarrow m_a = 37,5 \cdot 10^{-3} \text{ Kg} \Rightarrow m_a = 37,5 \text{ gr}$$

β. Σ' αυτήν την εκδοχή θεωρούμε ότι η πλατφόρμα εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση οπότε:

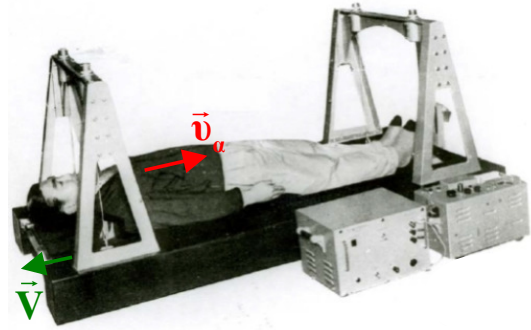
$$\left. \begin{array}{l} V = a\Delta t \\ \Delta x = \frac{1}{2} a\Delta t^2 \end{array} \right\} \div \Rightarrow \frac{V}{\Delta x} = \frac{2}{\Delta t} \Rightarrow V = 2 \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow V = 2 \frac{6 \cdot 10^{-5}}{16 \cdot 10^{-2}} \Rightarrow V = \frac{3}{4} \cdot 10^{-3} \text{ m/s} \quad (3).$$

$$\text{Από (1)} \Rightarrow m_a = \frac{60 \cdot \frac{3}{4} \cdot 10^{-3}}{0,6} \Rightarrow m_a = 75 \cdot 10^{-3} \text{ Kg} \Rightarrow m_a = 75 \text{ gr}$$

### Σχόλιο

Το αποτέλεσμα της 2<sup>ης</sup> εκδοχής είναι ρεαλιστικότερο διότι σε έναν τυπικό καρδιακό παλμό η καρδιά εξωθεί περίπου 70ml αίματος, μια τυπική τιμή πυκνότητας του αίματος είναι  $\rho=1,06 \text{ gr/ml}$ , άρα η εξωθούμενη μάζα αίματος είναι:  $m=\rho V= 1,06 \frac{\text{gr}}{\text{ml}} \cdot 70\text{ml}=74,2\text{gr}$ .

Είναι προφανές ότι στην εφαρμογή αυτή περιγράφεται η αρχή λειτουργίας της διάταξης. Στην πραγματικότητα η διάταξη είναι εφοδιασμένη με ευαίσθητο επιταχυνσιόμετρο με τη βοήθεια του οποίου μετρείται η επιτάχυνση της πλατφόρμας. Η διάταξη που απεικονίζεται στη φωτογραφία είναι αυτή που κατασκευάστηκε από τον Nihon Kohden το 1953. Αν και η τεχνική είναι γνωστή για περισσότερο από 60 χρόνια, επειδή η μάζα του εξωθούμενου αίματος είναι πολύ μικρή σε σύγκριση με τη μάζα του συστήματος σώμα – πλατφόρμα τα πειραματικά σφάλματα στη μέτρηση της επιτάχυνσης του αίματος ήταν μεγάλα και γι' αυτό η μέθοδος δεν ήταν και ιδιαίτερα χρήσιμη. Σχετικά πρόσφατα οι μοντέρνες τεχνικές επεξεργασίας σήματος επιτρέπουν τη μεγάλη μείωση των πειραματικών σφαλμάτων και το βαλλιστοκαρδιογράφημα συμπεριλαμβάνεται συχνά στις διαγνωστικές εξετάσεις στα πλαίσια ενός καρδιολογικού ελέγχου.



### Εφαρμογή 6<sup>η</sup>

Οι μοναχοί ενός μοναστηριού που βρίσκεται σε απόκρημνο βράχο χρησιμοποιούν το καλάθι του σχήματος για τις μετακινήσεις τους. Το καλάθι με τους δύο μοναχούς έχουν συνολική μάζα  $M=320\text{Kg}$  και κινείται με τη βοήθεια των τροχαλιών πάνω στο συρματόσχοινο με ταχύτητα  $v=20\text{m/s}$ . Το δίχτυ που έχει αμελητέα μάζα συνδέεται με την αλυσίδα μήκους  $\ell=20\text{m}$  και μάζας  $d=16\text{Kg/m}$  που παρουσιάζει με το έδαφος συντελεστή τριβής ολίσθησης  $\mu=0,5$ .

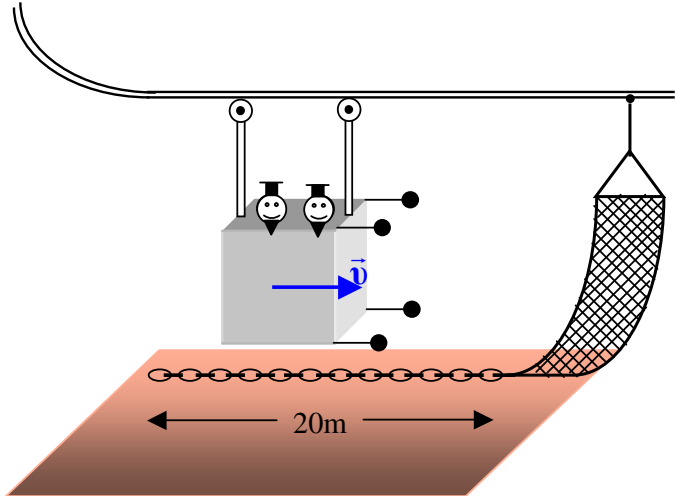
Να υπολογιστούν:

**α.** η ταχύτητα του συστήματος δίχτυ - αλυσίδα αμέσως μετά τη συνένωσή του με το «καλάθι». Ο χρόνος πρόσπτωσης του «καλαθιού» στο δίχτυ θεωρείται αμελητέος.

**β.** ο χρόνος  $\Delta t$  που απαιτείται για να ακινητοποιηθεί το «καλάθι».

**γ.** το μήκος που θα έπρεπε να έχει η αλυσίδα ώστε το «καλάθι» να ακινητοποιηθεί μετά από χρόνο  $\Delta t'=1\text{s}$ .

**δ.** ποια η σταθερά  $K$  ενός ιδανικού ελατηρίου με το οποίο θα μπορούσαμε να αντικαταστήσουμε την αλυσίδα προκειμένου να ακινητοποιήσουμε το «καλάθι» στον ίδιο χρόνο, αφού προηγουμένως συνδέσουμε το ένα άκρο του ιδανικού ελατηρίου με το δίχτυ και στερεώσουμε ακλόνητα το άλλο, στην περίπτωση που η παραμόρφωση του ελατηρίου είναι ίση με τη μετατόπιση της αλυσίδας. Δίνεται  $g=10\text{m/s}^2$ .



### Λύση

**α.** Η μάζα της αλυσίδας είναι:  
 $m_{\alpha\lambda\upsilon\sigma} = \ell \cdot d \Rightarrow m_{\alpha\lambda\upsilon\sigma} = 20 \cdot 16 = 320\text{Kg}$

(1)

Το σύστημα «καλάθι» - δίχτυ - αλυσίδα κατά τη διάρκεια της πρόσπτωσης του «καλαθιού» στο δίχτυ θεωρείται

μονωμένο διότι  $\vec{N}_{\text{εδαφ}} = -\vec{W}_{\alpha\lambda\upsilon\sigma}$  και η

ώθηση του βάρους του «καλαθιού»  $\vec{W}$  αμελείται. Η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή:

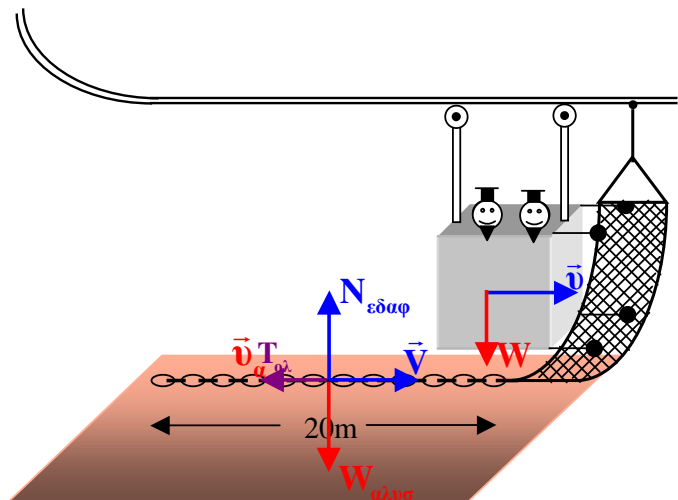
$$M\vec{v} = (M + m_{\alpha\lambda\upsilon\sigma})\vec{V} \Rightarrow V = \frac{M \cdot v}{M + m_{\alpha\lambda\upsilon\sigma}} \quad (2) \quad (1)$$

$$V = \frac{320 \cdot 20}{(320 + 320)} = 10\text{m/s}$$

**β.** Για την κίνηση της αλυσίδας μετά το τέλος της πρόσπτωσης από το Δεύτερο Νόμο έχουμε:

$$\vec{\Sigma F}_{\text{εξ}} = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} \Rightarrow -T_{\text{ολ}} = \frac{0 - (M + m_{\alpha\lambda\upsilon\sigma})V}{\Delta t} \Rightarrow -\mu N_{\text{εδαφ}} = -\frac{Mv}{\Delta t} \quad N_{\text{εδαφ}} = m_{\alpha\lambda\upsilon\sigma}g \Rightarrow -\mu m_{\alpha\lambda\upsilon\sigma}g = -\frac{Mv}{\Delta t} \Rightarrow$$

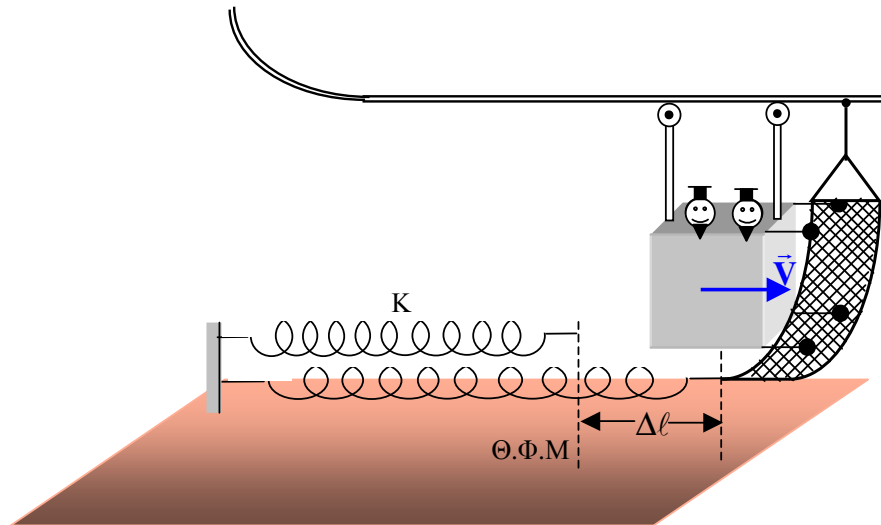
$$\Delta t = \frac{Mv}{\mu m_{\alpha\lambda\upsilon\sigma}g} \quad (3) \Rightarrow \Delta t = \frac{320 \cdot 20}{0,5 \cdot 320 \cdot 10} \Rightarrow \Delta t = 4\text{s}$$



γ. Αν  $\ell'$  = το νέο μήκος της αλυσίδας τότε η νέα μάζα της θα είναι  $m'_{\alpha\lambda\upsilon\sigma} = d \cdot \ell'$ , με αντικατάσταση στη σχέση (3) έχουμε:

$$\Delta t' = \frac{Mv}{\mu d \ell' g} \Rightarrow \ell' = \frac{Mv}{\mu d \Delta t' g} \Rightarrow \ell' = \frac{320 \cdot 20}{0,5 \cdot 16 \cdot 1 \cdot 10} \Rightarrow \ell' = 80\text{m}$$

δ.



Η αλυσίδα μήκους  $\ell$  μέχρι να ακινητοποιηθεί μαζί με το «καλάθι» μετατοπίζεται κατά

$\Delta \ell = \frac{V^2}{2a}$  (4). Το μέτρο της επιβράδυνσης που δέχεται το σύστημα αλυσίδα – δίχτυ –

«καλάθι» είναι:  $T_{ολ} = (m_{\alpha\lambda\upsilon\sigma} + M)a \Rightarrow a = \frac{\mu \cdot N_{\epsilon\delta\alpha\phi}}{m_{\alpha\lambda\upsilon\sigma} + M} \Rightarrow a = \frac{\mu \cdot m_{\alpha\lambda\upsilon\sigma} g}{m_{\alpha\lambda\upsilon\sigma} + M} \Rightarrow a = \frac{0,5 \cdot 320 \cdot 10}{320 + 320}$

$\Rightarrow a = 2,5 \text{ m/s}^2$  (5).

Από (4) και (2)  $\Rightarrow \Delta \ell = \frac{10^2}{2 \cdot 2,5} \Rightarrow \Delta \ell = 20\text{m}$  (6).

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε για την κίνηση του συστήματος μετά την πρόσπτωση και μέχρι αυτό να σταματήσει:

$$W_{F_{\epsilon\lambda}} = K_{\tau\epsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} \Rightarrow 0 - \frac{1}{2} K \Delta \ell^2 = 0 - \frac{1}{2} (M + m_{\alpha\lambda\upsilon\sigma}) V^2 \Rightarrow K = \frac{(M + m_{\alpha\lambda\upsilon\sigma}) V^2}{\Delta \ell^2} \Rightarrow$$

$$K = \frac{(320 + 320) 10^2}{20^2} \Rightarrow K = 160 \text{ N/m}$$