Εφαρμογές μεγάλης και μικρής κλίμακας στην «ομαλή» κυκλική κίνηση

Εφαρμογή 1η

Η μέση Αστρική ημέρα* έχει διάρκεια 23h 56min 4sec. Η ακτίνα της Γης στον ισημερινό είναι $R_\Gamma = 6{,}38 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$. Για έναν ερευνητή του Αστεροσκοπείου Αθήνας που βρίσκεται σε Γεωγραφικό Πλάτος** $37^\circ\, 58'\, 27'' = 37{,}97416^\circ$, να υπολογίσετε:

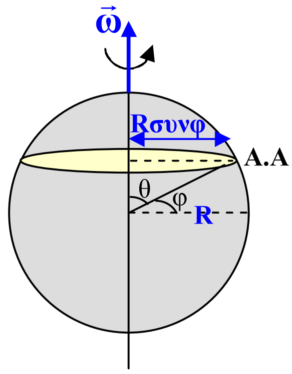
α. Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητάς του

β. Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητάς του

γ. Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης του, λόγω της συμμετοχής του στην περιστροφική κίνηση της Γης γύρω από τον άξονά της. Δίνεται $\pi = 3{,}14$ και $\sigma\upsilon\nu 37{,}97416^\circ = 0{,}78828$

Λύση

α. Η γωνία $\varphi = 37^\circ\, 58'\, 27''$ αντιστοιχεί στο Γεωγραφικό Πλάτος της Αθήνας(Αστεροσκοπείο Αθήνας) το οποίο λόγω της περιστροφής της Γης γύρω από τον άξονά της διαγράφει κυκλική τροχιά ακτίνας Rσυνφ ή Rημθ.Η γραμμική ταχύτητα του ερευνητή που εκτελεί "ομαλή" κυκλική κίνηση είναι:



$$\upsilon = \frac{2\pi R_\Gamma \sigma\upsilon\nu\varphi}{T_\Gamma} \Rightarrow \upsilon = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}38 \cdot 10^6 \cdot \sigma\upsilon\nu 37{,}97416^\circ}{86.164} = 366{,}55148 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

β. $\omega = \dfrac{2\pi}{T_\Gamma} = \dfrac{2 \cdot 3{,}14}{86.164} = 7{,}28842 \cdot 10^{-5} \dfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}.$

γ. $\alpha_\kappa = \dfrac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R = 7{,}28842^2 \cdot 10^{-10} \cdot 6{,}38 \cdot 10^6 = 33{,}8913 \cdot 10^{-2} \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$

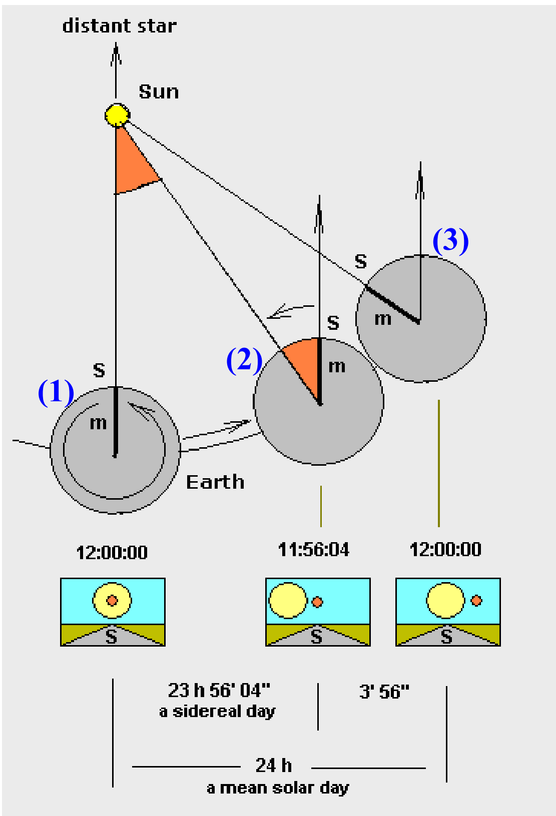
Η μεγάλη τιμή της ακτίνας της κυκλικής τροχιάς δίνει μεγάλη τιμή για την γραμμική ταχύτητα, αντίθετα η γωνιακή ταχύτητα και η κεντρομόλος επιτάχυνση έχουν ιδιαίτερα μικρές τιμές.

* **Ηλιακή ημέρα (solar day)** είναι ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών διελεύσεων του ήλιου από το μεσημβρινό ενός τόπου. Ο χρόνος αυτός όπως καταγράφεται από έναν παρατηρητή που βρίσκεται στο συγκεκριμένο τόπο ονομάζεται Φαινόμενη Ηλιακή Μέρα και έχει διάρκεια **24h**.

Αστρική ημέρα (sidereal day) είναι ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών μεσουρανήσεων σε έναν τόπο. Η διάρκειά της δεν είναι σταθερή, μεταβάλλεται λόγω της μετάπτωσης, της κλόνησης και από το γεγονός ότι το μακρινό αστέρι ως προς το οποίο υπολογίζεται η διάρκειά της στην πραγματικότητα δεν είναι ακίνητο.

Η διάρκεια της **Μέσης Αστρικής Ημέρας** είναι 23h 56min 4sec=23,9344699 h.

Στη διάρκεια μιας πλήρους περιστροφής της γύρω από τον άξονά της η Γη στρέφεται κατά 1° πάνω στην τροχιά της γύρω από τον Ήλιο, αυτό έχει ως συνέπεια να χρειάζεται να περιστραφεί λίγο περισσότερο από τη διάρκεια μιας Αστρικής Ημέρας πριν ο Ήλιος ξαναφτάσει σε μεσουράνηση στο συγκεκριμένο τόπο παρατήρησης. Έτσι, η ηλιακή ημέρα είναι μεγαλύτερη κατά 3 min και 56 sec. Η διαφορά μεταξύ Ηλιακής Ημέρας και Αστρικής Ημέρας φαίνεται στη διπλανή εικόνα που υπάρχει στο Wikipedia όπου ο

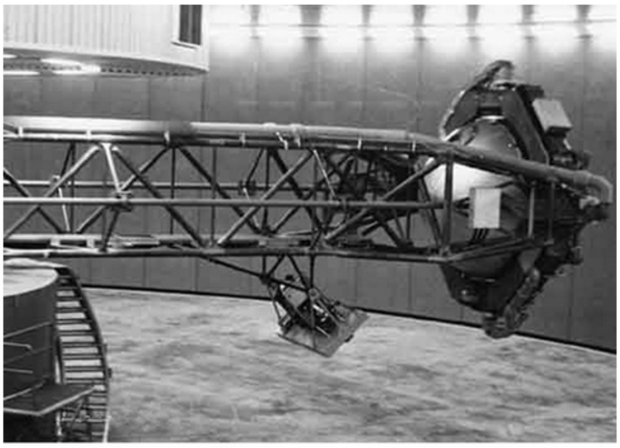


μικρός κόκκινος κύκλος αντιστοιχεί σε ένα μακρινό αστέρι. Στη θέση **(1)** το μακρινό αστέρι και ο Ήλιος είναι σε μεσουράνηση στον τοπικό μεσημβρινό. Στη θέση **(2)** σε μεσουράνηση βρίσκεται μόνο το μακρινό αστέρι (Μέση Αστρική Ημέρα) και στη θέση **(3)** λίγα λεπτά αργότερα ο Ήλιος βρίσκεται πάλι στον τοπικό μεσημβρινό (Ηλιακή Ημέρα).
Σε σχέση με το «μακρινό αστέρι», συνήθως χρησιμοποιείται το **Πρώτο Σημείο του Κριού** που είναι η θέση της **Εαρινής Ισημερίας**, δηλαδή το ένα από τα δύο σημεία της **Ουράνιας Σφαίρας** στα οποία ο **Ουράνιος Ισημερινός** συναντά το επίπεδο της **Εκλειπτικής**, το άλλο είναι το **Πρώτο Σημείο του Ζυγού** που είναι αντιδιαμετρικό του προηγούμενου.

** Γεωγραφικό Πλάτος (latitude) είναι η μία από τις δύο γεωγραφικές συντεταγμένες (η άλλη είναι το Γεωγραφικό Μήκος) και εκφράζει τη γωνιακή απόσταση ενός τόπου από τον Ισημερινό. Συμβολίζεται με φ και έχει τιμές 00° - 90° N (Βόρειο), ή 00° - 90° S (Νότιο). Η γωνία θ που είναι συμπληρωματική της φ, συχνά αναφέρεται και ως colatitude (co-mplementary of latitude=συμπληρωματική γωνία του γεωγραφικού πλάτους).

Εφαρμογή 2η

Ένας μεγάλος φυγοκεντρητής, όπως αυτός της εικόνας, που υπάρχει στη NASA, χρησιμοποιείται για την εκπαίδευση των υποψήφιων αστροναυτών σε συνθήκες παρόμοιες με αυτές που βιώνουν κατά την εκτόξευση των πυραύλων και την επανείσοδό τους στην ατμόσφαιρα.



Ο βραχίονας που συνδέει τον «κλωβό» που επιβαίνει ο εκπαιδευόμενος αστροναύτης με το κέντρο περιστροφής έχει μήκος ℓ=15,696m και πρόκειται να δεχτεί κεντρομόλο επιτάχυνση $\alpha_\kappa = 10g$*, όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης.

α. Να υπολογιστεί το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας με την οποία στρέφεται η διάταξη.

β. Ο «κλωβός» άδειος συνδέεται στο άκρο του βραχίονα έτσι ώστε να μπορεί να αιωρείται κατά τη διάρκεια της περιστροφής του.Να υπολογιστεί η γωνία $\hat{\theta}$ που σχηματίζει ο βραχίονας με την οριζόντια διεύθυνση για την τιμή της κεντρομόλου επιτάχυνσης του προηγούμενου ερωτήματος.

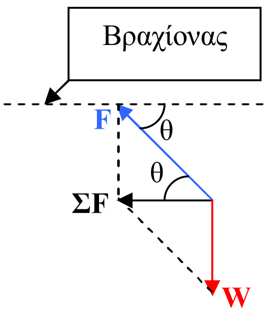
γ. Να υπολογιστεί η δύναμη που δέχεται από τον «κλωβό» ένας αστροναύτης μάζας m_α=59,9Kg, όταν στρέφεται δεχόμενος κεντρομόλο επιτάχυνση $\alpha_\kappa = 10g$.

Δίνεται ότι g=9,81 m/s^2 και $\varepsilon\varphi 5{,}71^\circ = 0{,}1$, $\sigma\upsilon\nu 5{,}71^\circ = 0{,}996$

Λύση

α. Από τη σχέση $\alpha_\kappa = \omega^2\ell \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{\alpha_\kappa}{\ell}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{10g}{\ell}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{10\cdot 9{,}81}{15{,}696}} \Rightarrow \omega = 2{,}5\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$

β. Ο «κλωβός» καθώς περιστρέφεται δέχεται την επίδραση του βάρους $\vec{W}$ και την επίδραση της δύναμης από τον βραχίονα $\vec{F}$, η οποία έχει διεύθυνση του βραχίονα , δηλαδή σχηματίζει γωνία $\hat{\theta}$ με την οριζόντια.Η συνισταμένη των δύο αυτών δυνάμεων ΣF παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης:

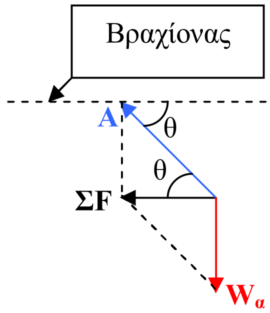


Από το διάγραμμα των δυνάμεων που επιδρούν στον «κλωβό» προκύπτει ότι

$\varepsilon\varphi\hat{\theta} = \dfrac{W}{\Sigma F} \Rightarrow$

Ξ. Στεργιάδης

$\varepsilon\varphi\hat{\theta}=\dfrac{mg}{m\alpha_\kappa}\Rightarrow \varepsilon\varphi\hat{\theta}=\dfrac{g}{\alpha_\kappa}\Rightarrow \varepsilon\varphi\hat{\theta}=\dfrac{g}{10g}\Rightarrow \varepsilon\varphi\hat{\theta}=0{,}1\ \ (\hat{\theta}=5{,}71^\circ)$.Όπως προκύπτει, η γωνία $\hat{\theta}$ είναι ανεξάρτητη από τη μάζα του «κλωβού».



γ. Στον εκπαιδευόμενο αστροναύτη επιδρούν το βάρος του $\vec{W}_\alpha$ και η δύναμη $\vec{A}$ από τον «κλωβό», η συνισταμένη τους θα παίζει ρόλο κεντρομόλου δύναμης για τον αστροναύτη που περιστρέφεται μαζί με τον «κλωβό»:

$$\sigma\upsilon\nu\hat{\theta}=\frac{\Sigma F}{A}\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\hat{\theta}=\frac{m_\alpha\cdot 10g}{A}\Rightarrow A=\frac{m_\alpha\cdot 10g}{\sigma\upsilon\nu\hat{\theta}}$$

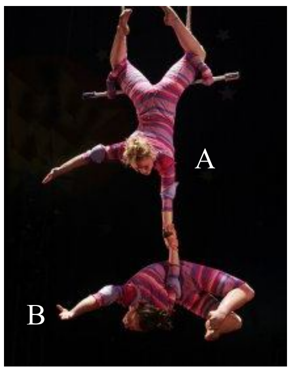
$$\Rightarrow A=\frac{59{,}9\cdot 10\cdot 9{,}81}{0{,}996}\Rightarrow A=5900\text{N}.$$

* Το πηλίκο της κεντρομόλου επιτάχυνσης προς την επιτάχυση της βαρύτητας στην επιφάνεια της γης ονομάζεται και σχετική φυγόκεντρος δύναμη (Relative Centrifugal Force – RFC), είναι αδιάστατο μέγεθος και μετριέται σε πολλαπλάσια της g: $RCF=\dfrac{\omega^2 R}{g}$

Στην φωτογραφία εικονίζεται ο σύγχρονος φυγοκεντρητής για ανθρώπους των 20g που βρίσκεται στο **NASA Ames Research Center**.

Οι πρώτοι φυγοκεντρητές χρησιμοποιήθηκαν σε έρευνα για ανθρώπους από τον Erasmus Darwin παππού του διάσημου Charles Darwin.Ο πρώτος μεγάλης κλίμακας φυγοκεντρητής για ανθρώπους που σχεδιάστηκε για αεροναυτική εκπαίδευση δημιουργήθηκε στη Γερμανία το 1933.

Εφαρμογή 3η



A_1. Η ακροβάτισσα Α διατηρεί λυγισμένα τα πόδια της και με προτεταμένο προς το έδαφος το χέρι της συγκρατεί την ακροβάτισσα Β. Η ακροβάτισσα Α για να συγκρατήσει την ακροβάτισσα Β:

α. καταβάλλει μεγαλύτερη προσπάθεια, όταν και οι δύο ισορροπούν ευρισκόμενες στην κατακόρυφη θέση

β. καταβάλλει μεγαλύτερη προσπάθεια, όταν η ακροβάτισσα Β αιωρούμενη σε τμήμα κυκλικής τροχιάς διέρχεται από την κατακόρυφη θέση

γ. καταβάλλει την ίδια προσπάθεια και στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις.

A_2. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

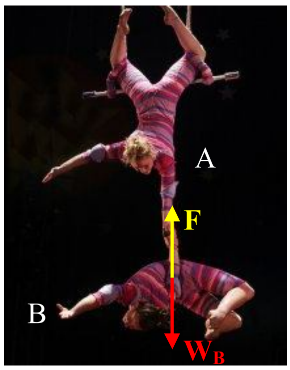
Λύση

A_1. β

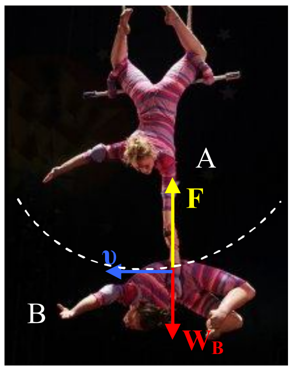
A_2. Όταν η ακροβάτισσα Β ισορροπεί οι δυνάμεις που ασκούνται σε αυτήν είναι η βαρυτική δύναμη W_B και η δύναμη F που της ασκεί η ακροβάτισσα Α **(Σχήμα 1)**.

$$\Sigma F_{(B)}=0\Rightarrow F=W_B \quad \textbf{(1)}$$

Όταν η ακροβάτισσα Β αιωρούμενη διέρχεται με ταχύτητα μέτρου υ από την κατακόρυφη θέση οι δυνάμεις που ασκούνται σε αυτήν φαίνονται στο **(Σχήμα 2)**. Η συνισταμένη τους αποτελεί την



(Σχήμα 1)



(Σχήμα 2)

απαραίτητη κεντρομόλο δύναμη που πρέπει να δέχεται η ακροβάτισσα Β:

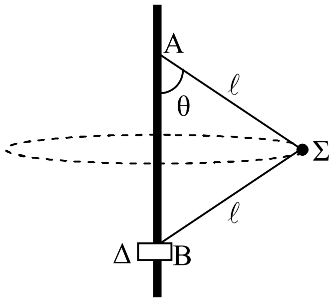
$$\Sigma F_{(B)} = F_\kappa \Rightarrow F\text{-}W_B = \frac{m_B \upsilon^2}{\ell} \Rightarrow F{=}W_B + \frac{m_B \upsilon^2}{\ell} \quad \textbf{(2)}$$

Όπου m_B= η μάζα, υ=το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας και ℓ= η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς για την ακροβάτισσα Β.

Από τις **(1)** και **(2)** προκύπτει ότι η ακροβάτισσα Α ασκεί μεγαλύτερη δύναμη, άρα καταβάλλει μεγαλύτερη προσπάθεια, όταν η ακροβάτισσα Β αιωρούμενη διέρχεται από την κατακόρυφη θέση.

Εφαρμογή 4η

Το σφαιρίδιο Σ μάζας m του σχήματος έχει συνδεθεί στα άκρα δύο αβαρών μη εκτατών νημάτων μήκους ℓ το καθένα. Το άλλο άκρο του ενός νήματος έχει συνδεθεί στο σταθερό σημείο Α του λείου κατακόρυφου σύρματος, ενώ το άλλο άκρο του άλλου νήματος έχει συνθεθεί σε δακτύλιο Δ, μάζας km με k > 0, που μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές πάνω στο κατακόρυφο σύρμα. Το σφαιρίδιο διαγράφει οριζόντια κυκλική τροχιά με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω. Το νήμα ΣΑ σχηματίζει με το κατακόρυφο σύρμα γωνία $\hat{\theta}$. Αν T_1 και T_2 είναι οι τάσεις των νημάτων ΣΑ και ΣΔ αντίστοιχα και ο δακτύλιος Δ ισορροπεί:



α. Να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου k , ώστε $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{4}{3}$

β. Να δείξετε ότι $T_1 + T_2 = m\omega^2\ell$

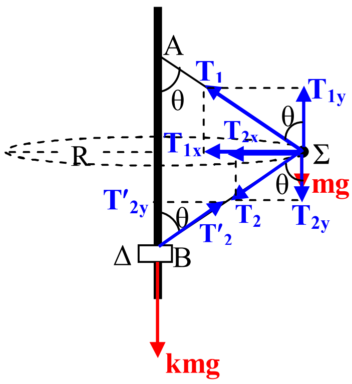
γ. Να προσδιορίσετε το εύρος τιμών της γωνιακής ταχύτητας σε συνάρτηση με τη γωνία $\hat{\theta}$, το μήκος των νημάτων ℓ και την επιτάχυνση της βαρύτητας g.

Λύση

α. Θεωρούμε ότι η τάση του νήματος ΣΑ έχει μέτρο T_1 και η τάση του νήματος ΣΔ έχει μέτρο T_2.

Το σφαιρίδιο Σ ισορροπεί στην κατακόρυφη διεύθυνση:

$$\Sigma F_{y(\Sigma)} = 0 \Rightarrow T_{1y} = T_{2y} + mg \Rightarrow T_1 \sigma\upsilon\nu\theta - T_2 \sigma\upsilon\nu\theta = mg \Rightarrow T_1 - T_2 = \frac{mg}{\sigma\upsilon\nu\theta} \quad \textbf{(1)}$$



Από την ισορροπία του δακτύλιου Δ:

$$\Sigma F_{y(\Delta)} = 0 \Rightarrow T'_{2y} = kmg \Rightarrow T'_2 \sigma\upsilon\nu\theta = kmg \overset{T'_2=T_2}{\Rightarrow} T_2 = \frac{kmg}{\sigma\upsilon\nu\theta} \quad \textbf{(2)}$$

Από **(1)** και **(2)**: $T_1 = \dfrac{(k+1)mg}{\sigma\upsilon\nu\theta}$ **(3)**

Από τη διαίρεση των **(3)** και **(2)**:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{(k+1)mg}{kmg} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{k+1}{k} \Rightarrow 4k = 3k + 3 \Rightarrow k = 3 \quad \textbf{(4)}$$

β. Από την οριζόντια ομαλή κυκλική κίνηση που εκτελεί το σφαιρίδιο Σ:

$$F_{\kappa(\Sigma)} = T_{1x} + T_{2x} \Rightarrow \frac{m\upsilon^2}{R} = T_1 \eta\mu\theta + T_2 \eta\mu\theta \Rightarrow m\omega^2 R = (T_1 + T_2)\eta\mu\theta$$

Αλλά η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς του σφαιριδίου R είναι $R = \ell\eta\mu\theta$ και η προηγούμενη σχέση γράφεται: $m\omega^2\ell\eta\mu\theta = (T_1 + T_2)\eta\mu\theta \Rightarrow T_1 + T_2 = m\omega^2\ell$ **(5)**

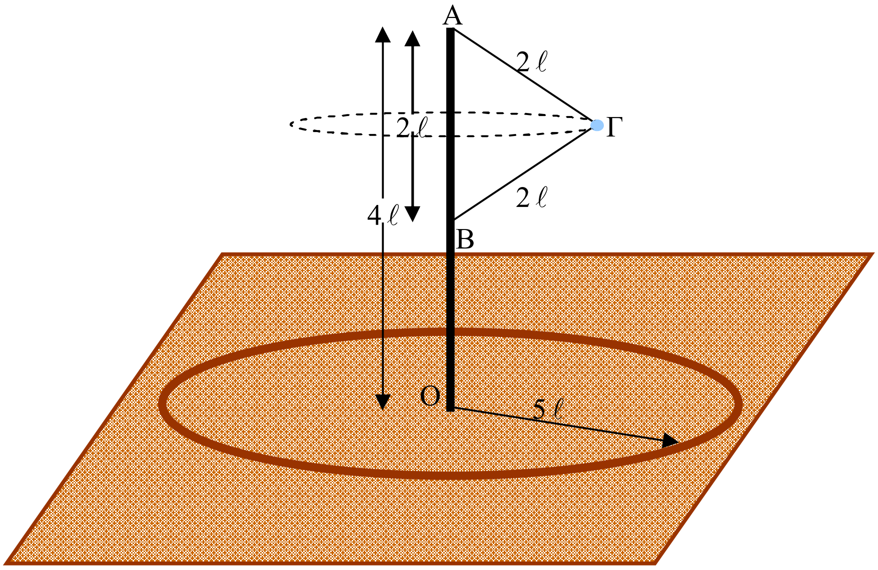
γ. Από την πρόσθεση των **(1)** και **(5)**:

$$2T_1 = \frac{mg}{\sigma\upsilon\nu\theta} + m\omega^2\ell \underset{(4)}{\overset{(3)}{\Rightarrow}} 2\frac{4mg}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{mg}{\sigma\upsilon\nu\theta} + m\omega^2\ell \Rightarrow \frac{7g}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \omega^2\ell \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{7g}{\omega^2\ell}$$

Ξ. Στεργιάδης

Αλλά: $\sigma\upsilon\nu\theta < 1 \Rightarrow \frac{7g}{\omega^2\ell} < 1 \Rightarrow \omega^2\ell > 7g \Rightarrow \omega > \sqrt{\frac{7g}{\ell}}$.

Εφαρμογή 5η



Ένα κατακόρυφο μεταλλικό στέλεχος ΟΑ μήκους 4ℓ,έχει το άκρο του Ο στερεωμένο σε οριζόντιο τραπέζι.Τα άκρα ενός αβαρούς και μη ελαστικού νήματος μήκους 4ℓ έχουν συνδεθεί στο Α και σ΄ένα σημείο Β του στελέχους που απέχει από το Α απόσταση 2ℓ. Μια μικρή χάντρα μάζας m έχει συνδεθεί στο μέσο του νήματος.Θέτουμε τη χάντρα σε οριζόντια κυκλική κίνηση με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω και τα δύο τμήματα του νήματος τεντωμένα. Με κέντρο το Ο και ακτίνα 5ℓ πάνω στο τραπέζι υπάρχει μια κυκλική εγκοπή. Κάποια χρονική στιγμή (t=0) κόβουμε ταυτόχρονα και τα δύο τμήματα του νήματος και η χάντρα αφού εκτελέσει οριζόντια βολή πέφτει μέσα στην εγκοπή. Η αντίσταση του αέρα αμελείται, με δεδομένες τις τιμές των m, ℓ και g να υπολογίσετε:

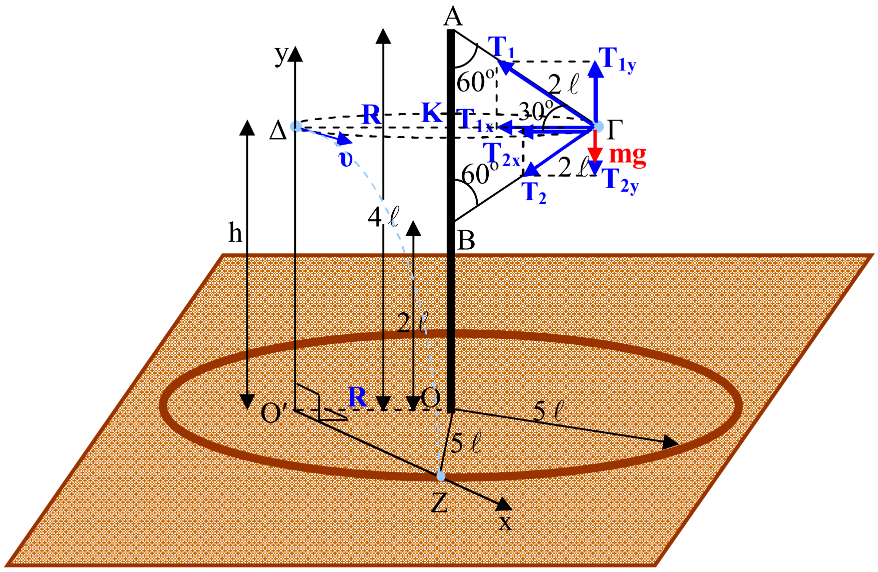
α. Τον χρόνο που μεσολαβεί από τη χρονική στιγμή που κόβουμε τα δύο τμήματα του νήματος και μέχρι η χάντρα να πέσει μέσα στην εγκοπή.

β. Να υπολογίσετε την τιμή του μέτρου της γωνιακής ταχύτητας ω της χάντρας κατά τη διάρκεια της κυκλικής κίνησής της.

γ. Όταν η χάντρα εκτελεί κυκλική κίνηση, να υπολογίσετε τις τιμές των τάσεων στα δύο τμήματα του νήματος.

δ. Να υπολογίσετε σε συνάρτηση με το ℓ το εύρος των τιμών της ακτίνας της κυκλικής εγκοπής, ώστε η χάντρα να πέφτει μέσα στην εγκοπή.

Λύση



α. Το τρίγωνο $\mathrm{A\hat{B}\Gamma}$ είναι ισόπλευρο πλευράς 2ℓ. Το Κ είναι μέσο της ΑΒ και κέντρο της οριζόντιας κυκλικής τροχιάς που διαγράφει η χάντρα με ακτίνα $R = 2\ell\eta\mu 60^\circ \Rightarrow R = \ell\sqrt{3}$ **(1)**.

Μετά την ταυτόχρονη κοπή των δύο τμημάτων του νήματος η χάντρα εκτελεί οριζόντια βολή από ύψος $h = (KB) + 2\ell \Rightarrow h = 3\ell$ **(2)**.

Η εξίσωση της κίνησης της προβολής της χάντρας στον άξονα Ο΄y είναι:

$$y = h - \frac{1}{2}gt^2 \underset{t=t_{o\lambda}}{\overset{y=0}{\Rightarrow}} t_{o\lambda} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \overset{(2)}{\Rightarrow} t_{o\lambda} = \sqrt{\frac{6\ell}{g}} \quad \textbf{(3)}$$

β. Αν η χάντρα τη χρονική στιγμή που κόβουμε τα δύο τμήματα του νήματος βρίσκεται στην τυχαία θέση Δ, τότε για την κίνηση της προβολής της στον άξονα Ο΄x έχουμε:

$$x = \upsilon t \underset{t=t_{o\lambda}}{\overset{x=s_\beta}{\Rightarrow}} s_\beta = \upsilon t_{o\lambda} \overset{(3)}{\Rightarrow} s_\beta = \upsilon\sqrt{\frac{6\ell}{g}} \quad \textbf{(4)}$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $O\hat{O'}Z$ έχουμε:

$$(OZ)^2 = (OO')^2 + (O'Z)^2 \Rightarrow (3\ell)^2 = R^2 + s_\beta^2 \Rightarrow s_\beta = \sqrt{25\ell^2 - R^2} \overset{(1)}{\Rightarrow} s_\beta = \sqrt{25\ell^2 - 3\ell^2} \Rightarrow s_\beta = \ell\sqrt{22} \quad \textbf{(5)}$$

Από **(4)** $\overset{(5)}{\Rightarrow} \ell\sqrt{22} = \upsilon\sqrt{\frac{6\ell}{g}} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{11g\ell}{3}} \quad \textbf{(6)}$

Αλλά από την οριζόντια ομαλή κυκλική κίνηση της χάντρας:

$$\upsilon = \omega R \underset{(6)}{\overset{(1)}{\Rightarrow}} \omega = \frac{\sqrt{\frac{11g\ell}{3}}}{\ell\sqrt{3}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{11g}{9\ell}} \quad \textbf{(7)}$$

γ. Η χάντρα ισορροπεί στην κατακόρυφη διεύθυνση:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_{1y} = T_{2y} + mg \Rightarrow T_1 \eta\mu 30^o - T_2 \eta\mu 30^o = mg \Rightarrow T_1 - T_2 = 2mg \quad \textbf{(8)}$$

Από την οριζόντια ομαλή κυκλική κίνηση που εκτελεί η χάντρα:

$$F_\kappa = T_{1x} + T_{2x} \Rightarrow \frac{m\upsilon^2}{R} = T_1 \sigma\upsilon\nu 30^o + T_2 \sigma\upsilon\nu 30^o \Rightarrow m\omega^2 R = (T_1 + T_2)\sigma\upsilon\nu 30^o \overset{(1)}{\Rightarrow} m\omega^2\ell\sqrt{3} = (T_1 + T_2)\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow T_1 + T_2 = 2m\omega^2\ell \quad \textbf{(9)}$$

Από την πρόσθεση των **(8)** και **(9)** κατά μέλη έχουμε:

$$T_1 = mg + m\omega^2\ell \overset{(7)}{\Rightarrow} T_1 = mg + m\frac{11g}{9\ell}\ell \Rightarrow T_1 = \frac{20mg}{9}. \quad \textbf{(10)}$$

Από **(8)** $\overset{(10)}{\Rightarrow} T_2 = \frac{20mg}{9} - 2mg \Rightarrow T_2 = \frac{2mg}{9}$.

δ. Αν r = η ακτίνα της κυκλικής εγκοπής, τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο $O\hat{O'}Z$ έχουμε:

$$(OZ)^2 = (OO')^2 + (O'Z)^2 \Rightarrow r^2 = R^2 + s_\beta^2 \underset{(4)}{\overset{(1)}{\Rightarrow}} r^2 = 3\ell^2 + \upsilon^2\frac{6\ell}{g} \Rightarrow r^2 = 3\ell^2 + \omega^2 3\ell^2\frac{6\ell}{g} \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{(r^2 - 3\ell^2)g}{18\ell^3}} \quad \textbf{(11)}$$

Από την αφαίρεση των **(9)** και **(8)** κατά μέλη έχουμε: $T_2 = m\omega^2\ell - mg$,όμως το νήμα μόνο έλκει, άρα πρέπει $T_2 > 0$ και από την προηγούμενη σχέση $m\omega^2\ell - mg > 0 \Rightarrow \omega > \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ **(12)**

Από τις **(11)** και **(12)**:

$$\sqrt{\frac{(r^2 - 3\ell^2)g}{18\ell^3}} > \sqrt{\frac{g}{\ell}} \Rightarrow \frac{r^2 - 3\ell^2}{18\ell^2} > 1 \Rightarrow r^2 - 3\ell^2 > 18\ell^2 \Rightarrow r^2 > 21\ell^2 \Rightarrow r > \ell\sqrt{21}.$$

Ξ. Στεργιάδης