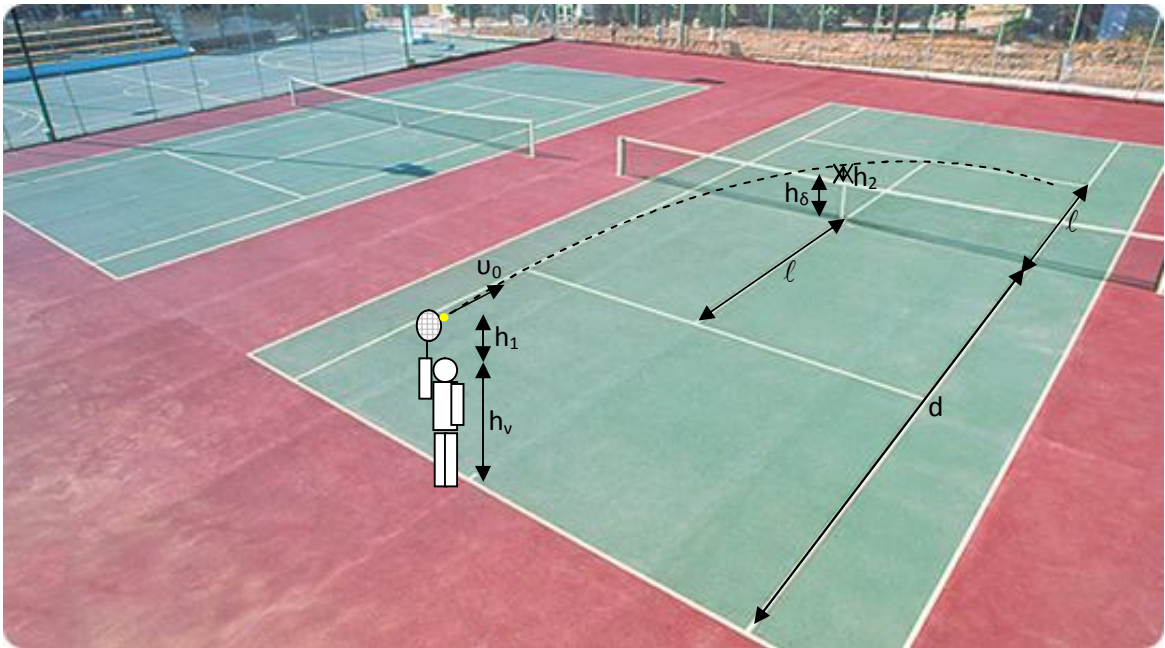


Οριζόντια βολή. Επιλέγοντας την ταχύτητα βολής.

1^η Εφαρμογή (Το επιτυχημένο service)

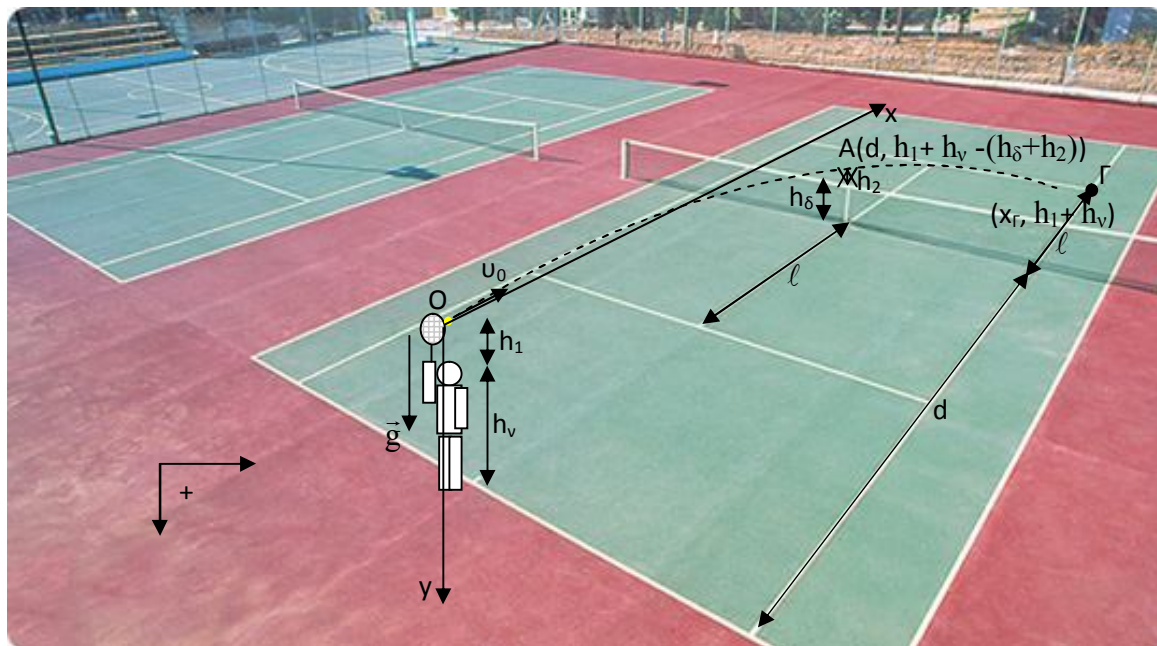
Νεαρός τενίστας που έχει ύψος $h_v=1,6\text{m}$ εκτελεί service και το μπαλάκι φεύγει από ύψος $h_1=0,4\text{m}$ πάνω από το κεφάλι του με οριζόντια ταχύτητα μέτρου v_0 . Η θέση από την οποία πραγματοποιείται το service απέχει από το δίχτυ οριζόντια απόσταση $d=12\text{m}$. Ο τενίστας για να μη διακινδυνεύσει την επιτυχία του service φροντίζει το μπαλάκι να περνάει σε κατακόρυφη απόσταση τουλάχιστον $h_2=10\text{cm}$ πάνω από το δίχτυ που έχει ύψος $h_3=0,9\text{m}$. Το service είναι επιτυχημένο όταν το μπαλάκι κτυπάει εντός της περιοχής του service δηλαδή σε οριζόντια απόσταση το πολύ $\ell=6,4\text{m}$ από το δίχτυ. Να προσδιοριστούν οι επιτρεπτές τιμές για το μέτρο της ταχύτητας βολής, ώστε το service να είναι επιτυχημένο. Δίνονται : $g=10\text{m/s}^2$, $\sqrt{2} = 1,414$ και $\sqrt{5} = 2,236$, η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.



Λύση

Το μπαλάκι εκτελεί οριζόντια βολή από ύψος $h_v + h_1$ από το έδαφος. Η ανάλυση της κίνησής του στο κατακόρυφο σύστημα συντεταγμένων xOy του σχήματος δίνει ότι η προβολή της μπάλας στον άξονα Ox εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση, άρα $x=v_0t$ (1) και στον κατακόρυφο άξονα Oy εκτελεί ελεύθερη πτώση, άρα $y=\frac{1}{2}gt^2$ (2). Με απαλοιφή του χρόνου από τις (1) και (2)

προκύπτει η εξίσωση τροχιάς που είναι παραβολική : $y = \frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2}$ (3)



Για να είναι επιτυχημένο το service πρέπει:

1. όταν το μπαλάκι βρίσκεται πάνω από το δίχτυ στο σημείο A ($d, h_1 + h_v - (h_\delta + h_2)$) να ισχύει:

$$y_A \leq h_v + h_1 - (h_\delta + h_2) \stackrel{(3)}{\Rightarrow}_{x=d}$$

$$\frac{1}{2} g \frac{d^2}{v_0^2} \leq h_v + h_1 - (h_\delta + h_2) \Rightarrow v_0^2 \geq \frac{gd^2}{2[h_v + h_1 - (h_\delta + h_2)]}$$

$$\Rightarrow v_0 \geq d \sqrt{\frac{g}{2[h_v + h_1 - (h_\delta + h_2)]}} \Rightarrow v_0 \geq 12 \sqrt{\frac{10}{2[1,6 + 0,4 - (0,9 + 0,1)]}} \Rightarrow v_0 \geq 12\sqrt{5} \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow v_0 \geq 26,832 \text{ m/s (4) και}$$

2. όταν το μπαλάκι κτυπάει στο έδαφος στο σημείο Γ ($x_\Gamma, h_1 + h_v$) να ισχύει: $x_\Gamma \leq d + l$ (5)

Ο ολικός χρόνος κίνησης μέχρι να φθάσει το μπαλάκι στο έδαφος υπολογίζεται από τη σχέση

(2): $y = h_v + h_1 \Rightarrow \frac{1}{2} g t_{ολ}^2 = h_v + h_1 \Rightarrow t_{ολ} = \sqrt{\frac{2(h_v + h_1)}{g}}$ (6). Η μέγιστη οριζόντια απόσταση που

διανύει το μπαλάκι μέχρι να κτυπήσει στο έδαφος (βεληνεκές) είναι :

$$x_\Gamma (s_\beta) = v_0 t_{ολ} \Rightarrow x_\Gamma = v_0 \sqrt{\frac{2(h_v + h_1)}{g}} \quad (7)$$

$$\text{Από (5)} \stackrel{(7)}{\Rightarrow} v_0 \sqrt{\frac{2(h_v + h_1)}{g}} \leq d + l \Rightarrow v_0 \leq (d + l) \sqrt{\frac{g}{2(h_v + h_1)}}$$

$$\Rightarrow v_0 \leq (12 + 6,4) \sqrt{\frac{10}{2(1,6 + 0,4)}} \Rightarrow v_0 \leq 9,2\sqrt{2}\sqrt{5} \Rightarrow v_0 \leq 29,087 \text{ m/s (8).}$$

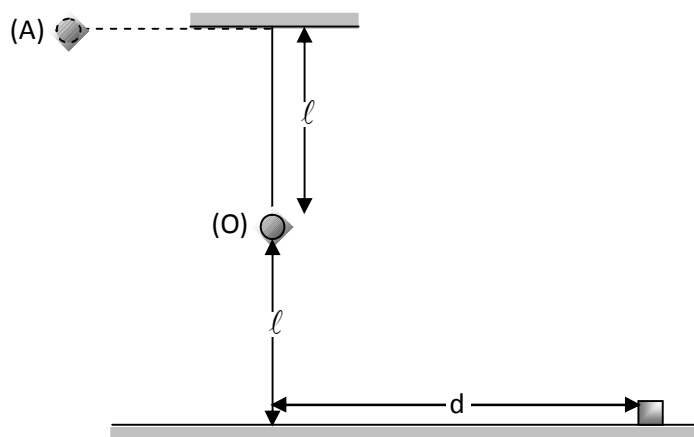
Από (4) και (8) : $26,832 \text{ m/s} \leq v_0 \leq 29,087 \text{ m/s}$

Σχόλιο

Το μήκος ενός γηπέδου τένις για «μονό» αγώνα είναι 23,77m x 8,23m (10,97m στο «διπλό») και διαιρείται από το δίκτυο σε δύο ίσα τμήματα μήκους 11,89m καθένα. Το δίκτυο έχει ύψος 0,914m και ο χώρος του service έχει μήκος 6,4m. Το μπαλάκι έχει διάμετρο από 6,35cm έως 6,67cm. Συνεπώς τα αριθμητικά δεδομένα της εφαρμογής είναι σχεδόν ρεαλιστικά. Η ταχύτητα των 29,087m/s αντιστοιχεί σε 104,713 Km/h, η μεγαλύτερη ταχύτητα service που έχει καταγραφεί είναι 263Km/h.

2^η Εφαρμογή (Όταν το μήκος του νήματος καθορίζει την επιτυχία της βολής)

Στην οροφή στερεώνεται το ένα άκρο αβαρούς μη ελαστικού νήματος μήκους ℓ στο άλλο άκρο του οποίου έχει συνδεθεί μικρή σφαίρα μάζας m . Το σύστημα αρχικά ισορροπεί στην κατακόρυφη θέση του νήματος και η σφαίρα απέχει από το δάπεδο απόσταση ίση με το μήκος του νήματος ℓ . Ανυψώνουμε τη σφαίρα μέχρι το νήμα να βρεθεί στην οριζόντια θέση και την αφήνουμε ελεύθερη. Αν το νήμα σπάει όταν βρεθεί στην κατακόρυφη θέση:



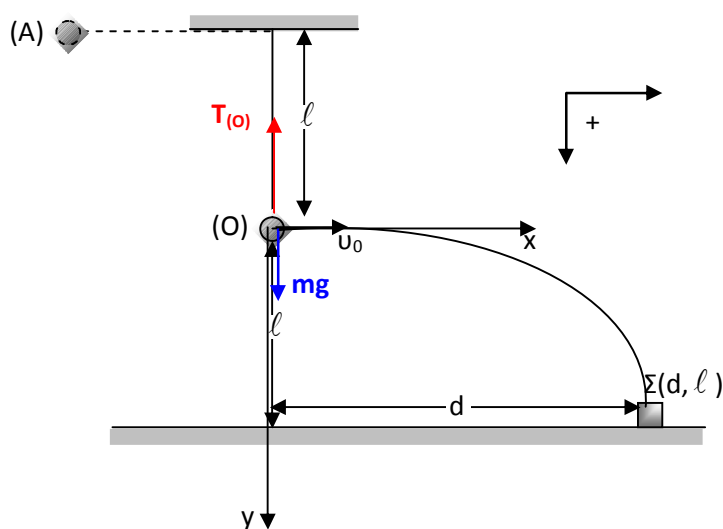
α. Να υπολογίσετε το όριο θραύσης του νήματος ($T_{\theta\rho}$).

β. Μετά τη θραύση του νήματος η σφαίρα εκτελεί οριζόντια βολή. Να υπολογίσετε το μήκος του νήματος, ώστε η σφαίρα να κτυπήσει μικρό κουτί-στόχο που βρίσκεται στο δάπεδο σε οριζόντια απόσταση d από τη θέση βολής της σφαίρας και στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο με αυτό που κινείται η σφαίρα. Δίνονται η μάζα της σφαίρας m , η απόσταση d , η g Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Λύση

α. Κατά την κίνηση της σφαίρας από τη θέση A στη θέση O δέχεται την επίδραση του βάρους και της δύναμης από το νήμα (τάση). Το βάρος είναι συντηρητική δύναμη και η τάση του νήματος δεν εκτελεί έργο καθώς είναι διαρκώς κάθετη στην ταχύτητα, έτσι η μηχανική ενέργεια διατηρείται σταθερή:

$E_{M(A)} = E_{M(O)} \Rightarrow U_{\beta(A)} + K_{(A)} = U_{\beta(O)} + K_{(O)}$.
Θεωρούμε ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη θέση O:



$$mg\ell + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{2g\ell} \quad (1)$$

Η συνισταμένη των δυνάμεων κατά τη διεύθυνση του νήματος στη θέση Ο αποτελεί την κεντρομόλο δύναμη : $F_{κ(Ο)} = T_{(Ο)} - mg \Rightarrow \frac{mv_0^2}{\ell} = T_{(Ο)} - mg \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \frac{m2g\ell}{\ell} = T_{(Ο)} - mg \Rightarrow T_{(Ο)} = 3mg$

Επειδή το νήμα σπάει στη θέση (Ο), $T_{\theta\rho}=3mg$.

β. Για την οριζόντια βολή που εκτελεί η σφαίρα μετά την θραύση του νήματος από ύψος ℓ :

Αναλύουμε την κίνηση της σφαίρας στο κατακόρυφο σύστημα συντεταγμένων xOy του σχήματος, η προβολή της σφαίρας στον άξονα Ox εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση, άρα $x=v_0t$ (2) και στον κατακόρυφο άξονα Oy εκτελεί ελεύθερη πτώση, άρα $y=\frac{1}{2}gt^2$ (3). Με απαλοιφή του

χρόνου από τις (2) και (3) προκύπτει η εξίσωση τροχιάς που είναι παραβολική : $y = \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2}$ (4)

Για να κτυπήσει η σφαίρα το κουτί –στόχο πρέπει το σημείο Σ ($s_\beta=d$, ℓ) να είναι το τελευταίο σημείο της τροχιάς της, δηλαδή να επαληθεύει με τις συντεταγμένες του στο σύστημα xOy την εξίσωση τροχιάς:

$$\text{Από την (4)} \quad \begin{matrix} (x=s_\beta=d) \\ (y=\ell) \end{matrix} \Rightarrow \ell = \frac{1}{2}g\frac{d^2}{v_0^2} \quad \begin{matrix} (x=s_\beta=d) \\ (y=\ell) \end{matrix} \Rightarrow \ell = \frac{1}{2}g\frac{d^2}{v_0^2} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \ell = \frac{1}{2}g\frac{d^2}{2g\ell} \Rightarrow \ell^2 = \frac{d^2}{4} \Rightarrow \ell = \frac{d}{2}.$$

3^η Εφαρμογή (Η ταχύτητα του νερού καθορίζει το πλάτος του πεζόδρομου)

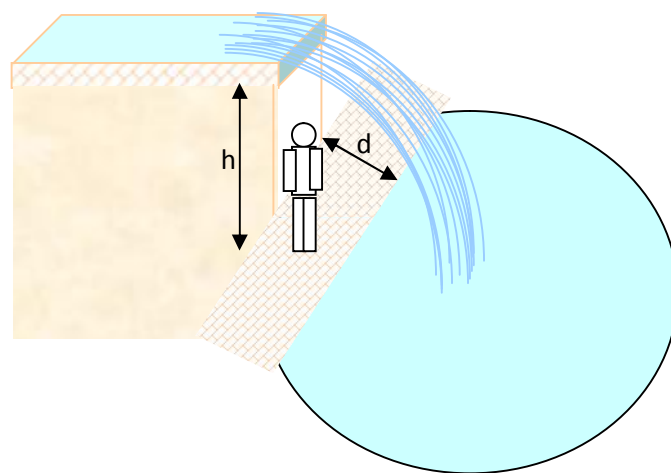
Ένας αρχιτέκτονας σχεδιάζει έναν τεχνητό καταρράκτη για την επικείμενη ανάπλαση του Φαληρικού Δέλτα. Το νερό που ρέει σε ένα οριζόντιο τεχνητό κανάλι με ταχύτητα μέτρου $v_0=2\text{m/s}$ πρόκειται να πέφτει από ύψος $h=3,2\text{m}$ μέσα σε μία τεχνητή λίμνη.

α. Ο χώρος κάτω από τον καταρράκτη θα είναι αρκετός για να επιτρέπει τον περίπατο των πεζών, αν το πλάτος του πεζόδρομου πρέπει να είναι τουλάχιστον $d=1,5\text{m}$;

β. Ποια η ελάχιστη τιμή του μέτρου της ταχύτητας των μορίων του νερού ώστε να διασφαλίζεται το ελάχιστο πλάτος πεζόδρομου του προηγούμενου ερωτήματος;

γ. Ο αρχιτέκτονας για να παρουσιάσει το σχέδιό του θέλει να κατασκευάσει μία μακέτα με κλίμακα 1:16. Με ποια ταχύτητα πρέπει να ρέει το νερό στο κανάλι της μακέτας;

Να θεωρήσετε ότι τα μόρια του νερού κινούνται μόνο υπό την επίδραση της βαρυτικής δύναμης. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.



Λύση

α. Τα μόρια του νερού εκτελούν οριζόντια βολή από ύψος $h=3,2\text{m}$. Όταν φτάνουνε στο ύψος της λίμνης οι συντεταγμένες τους είναι (s_β, h) . Από την εξίσωση τροχιάς

$$\text{έχουμε: } y = \frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2} \Rightarrow s_\beta = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow$$

$$s_\beta = 2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 3,2}{10}} \Rightarrow s_\beta = 1,6\text{m}$$

Επειδή $s_\beta > d=1,5\text{m}$ ο χώρος του σχεδιαζόμενου πεζόδρομου είναι αρκετός.

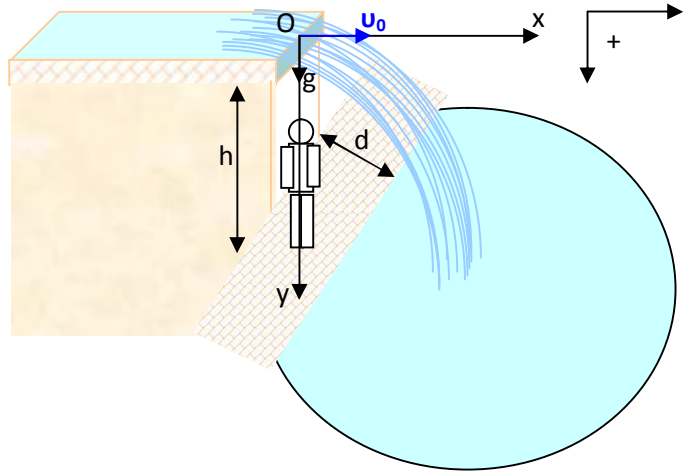
β. Πρέπει $s_\beta \geq d \Rightarrow v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \geq d \Rightarrow v_0 \geq d \sqrt{\frac{g}{2h}} \Rightarrow v_{0\text{min}} = d \sqrt{\frac{g}{2h}} \Rightarrow v_{0\text{min}} = 1,5 \sqrt{\frac{10}{6,4}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow v_{0\text{min}} = 1,875\text{m/s}$$

γ. Επειδή η μακέτα θα κατασκευαστεί με κλίμακα 1:16 θα πρέπει σ' αυτήν το ύψος βολής του νερού h να γίνει $h' = \frac{h}{16}$ και το πλάτος του πεζόδρομου d να γίνει $d' = \frac{d}{16}$. Επαληθεύοντας την

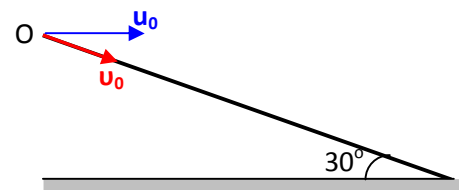
εξίσωση τροχιάς για τις διαστάσεις της μακέτας προκύπτει $h' = \frac{1}{2}g \frac{d'^2}{v_0'^2} \Rightarrow \frac{h}{16} = \frac{1}{2}g \frac{d^2}{16^2 v_0'^2} \Rightarrow$

$$v_0' = d \sqrt{\frac{g}{32h}} \Rightarrow v_0' = 1,6 \sqrt{\frac{10}{32 \cdot 3,2}} \Rightarrow v_0' = \frac{1,6 \cdot 10}{32} \Rightarrow v_0' = 0,5\text{m/s}$$



4^η Εφαρμογή (Συνάντηση στο κεκλιμένο)

Από Ο λείου κεκλιμένου επιπέδου πολύ μεγάλου μήκους και γωνίας κλίσης $\hat{\phi}=30^\circ$ εκτοξεύεται οριζόντια μικρή σφαίρα με ταχύτητα μέτρου u_0 . Ταυτόχρονα από το ίδιο σημείο Ο μια δεύτερη όμοια σφαίρα εκτοξεύεται κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου με ταχύτητα μέτρου $v_0=10\text{m/s}$. Οι δύο σφαίρες κινούνται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο.



Να υπολογίσετε :

α. το χρόνο συνάντησης (t_σ) των δύο σφαιρών,

β. το μέτρο της ταχύτητας u_0 , ώστε οι δύο σφαίρες να συναντώνται σε σημείο του κεκλιμένου επιπέδου,

γ. την απόσταση του σημείου συνάντησης των δύο σφαιρών από το σημείο Ο.

Δίνεται η $g=10\text{m/s}^2$, η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Λύση

α.

1^{ος} τρόπος

Έστω ότι δύο σφαίρες συναντώνται στο σημείο A του κεκλιμένου επιπέδου. Η σφαίρα που βάλλεται οριζόντια με αρχική ταχύτητα u_0 στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων xOy του **Σχήματος 1** έχει μετατόπιση \vec{s}_{OA} μέτρου ίσου με αυτό της μετατόπισης της σφαίρας που βάλλεται επί του λείου κεκλιμένου επιπέδου με αρχική ταχύτητα u_0 , άρα:

$$s_{OA} = u_0 t + \frac{1}{2} g_x t^2 \Rightarrow s_{OA} = u_0 t + \frac{1}{2} g(\eta\mu 30^\circ) t^2 \\ \Rightarrow s_{OA} = 10t + 2,5t^2 \quad (1)$$

Αναλύουμε την κίνηση της σφαίρας που βλήθηκε με αρχική ταχύτητα u_0 και για τις προβολές της στους άξονες Ox και Oy αντίστοιχα έχουμε: $x = u_0 t$ (2) και $y = \frac{1}{2} g t^2$ (3)

Αλλά $x_A = s_{OA} \sin 30^\circ$ (4) και $y_A = s_{OA} \eta\mu 30^\circ$ (5).

$$\text{Από (5)} \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \frac{1}{2} g t_\sigma^2 = 5t_\sigma + 1,25t_\sigma^2 \Rightarrow 5t_\sigma^2 - 1,25t_\sigma^2 = 5t_\sigma \Rightarrow 3,75t_\sigma^2 - 5t_\sigma = 0 \Rightarrow$$

$$1,25t_\sigma(3t_\sigma - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_\sigma = 0 \text{ απορ.} \\ t_\sigma = \frac{4}{3} \text{ s} \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{β. Από (4)} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} u_0 t_\sigma = (10t_\sigma + 2,5t_\sigma^2) \sin 30^\circ \stackrel{(6)}{\Rightarrow} u_0 \frac{4}{3} = \frac{40}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{40}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow u_0 = \frac{20\sqrt{3}}{3} \text{ m/s} \quad (7)$$

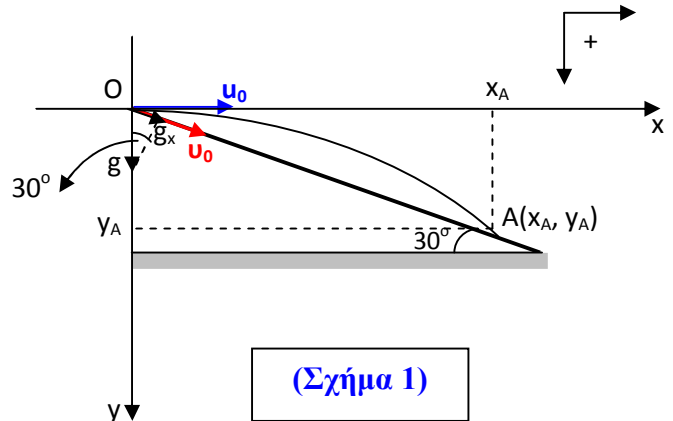
2^{ος} τρόπος

Η ευθεία που αντιστοιχεί στο κεκλιμένο επίπεδο τέμνει την παραβολική τροχιά που διαγράφει η σφαίρα που βάλλεται οριζόντια στο σημείο A (x_A, y_A), άρα:

$$y_A = x_A \epsilon\phi 30^\circ \Rightarrow \frac{1}{2} g t_\sigma^2 = u_0 t_\sigma \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 5t_\sigma^2 - u_0 \frac{\sqrt{3}}{3} t_\sigma = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_\sigma = 0 \text{ απορ.} \\ t_\sigma = \frac{u_0 \sqrt{3}}{15} \end{cases} \quad (1')$$

Αλλά $y_A = s_{OA} \eta\mu 30^\circ$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} y = (10t + 2,5t_\sigma^2) \eta\mu 30^\circ \Rightarrow 5t_\sigma^2 = 5t_\sigma + 1,25t_\sigma^2 \Rightarrow 3,75t_\sigma^2 - 5t_\sigma = 0$$



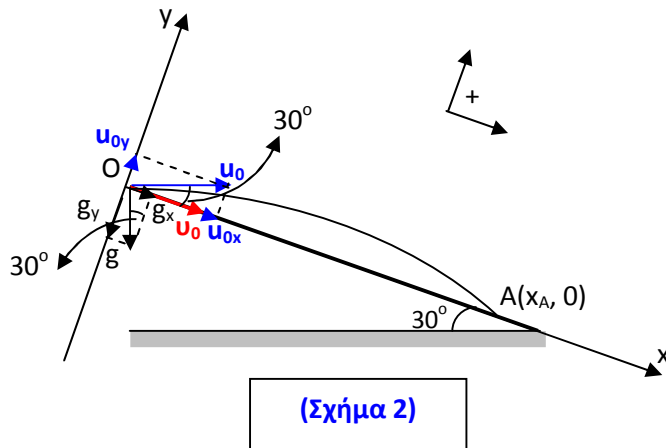
$$\Rightarrow 1,25t_{\sigma}(3t - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_{\sigma} = 0 \text{ απορ.} \\ t_{\sigma} = \frac{4}{3} \text{ s (2')} \end{cases}$$

Από (1') και (2'):

$$v_0 = \frac{15 \cdot 4}{3\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{3}}{3} \text{ m/s}$$

3^{ος} τρόπος

Επιλέγουμε να αναλύσουμε την κίνηση της σφαίρας που βάλλεται με οριζόντια ταχύτητα u_0 σε ένα σύστημα αξόνων xOy όπου ο άξονας Ox έχει τη διεύθυνση στο κεκλιμένο επίπεδο και ο άξονας Oy (Σχήμα 2) είναι κάθετος στο κεκλιμένο επίπεδο:



$$x_1 = v_0 t_{\sigma} + \frac{1}{2} g \mu 30^{\circ} t_{\sigma}^2 \quad (1)$$

$$y_1 = 0 \quad (2)$$

$$x_2 = u_0 \cos 30^{\circ} t_{\sigma} + \frac{1}{2} g \mu 30 t_{\sigma}^2 \quad (3)$$

$$y_2 = u_0 \eta \mu 30^{\circ} t_{\sigma} - \frac{1}{2} g \sigma \nu 30^{\circ} t_{\sigma}^2 \quad (4)$$

Από (1) και (3):

$$v_0 t_{\sigma} + \frac{1}{2} g \mu 30^{\circ} t_{\sigma}^2 = u_0 \cos 30^{\circ} t_{\sigma} + \frac{1}{2} g \mu 30 t_{\sigma}^2 \Rightarrow$$

$$u_0 = \frac{v_0}{\cos 30} = \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{20\sqrt{3}}{3} \text{ m/s} \quad (5)$$

Από (2) και (4):

$$0 = \frac{u_0}{2} t - 2,5\sqrt{3} t_{\sigma}^2 \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \frac{10\sqrt{3}}{3} t_{\sigma} - 2,5\sqrt{3} t_{\sigma}^2 = 0 \Rightarrow 2,5\sqrt{3} t_{\sigma} (\frac{4}{3} - t) = 0 \Rightarrow t_{\sigma} = \frac{4}{3} \text{ s}$$

γ. Από τον 1^ο τρόπο (Σχήμα 1) έχουμε:

$$\text{Από (2)} \stackrel{(6)}{\Rightarrow} x_A = \frac{80\sqrt{3}}{9} \text{ m}$$

$$\text{Από (3)} \stackrel{(6)}{\Rightarrow} y_A = \frac{80}{9} \text{ m}$$

$$\text{Η απόσταση (OA)} = s_{OA} = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} \Rightarrow s_{OA} = \sqrt{\frac{3 \cdot 80^2}{9} + \frac{80^2}{9}} \Rightarrow s_{OA} = \frac{160}{9} \text{ m}$$

