Επαναληπτικό Διαγώνισμα Φυσικής Κατεύθυνσης 2014

ΘΕΜΑ 1°

Να γράψετε στο φύλλο απαντήσεών σας τον αριθμό καθεμιάς από τις ακόλουθες ημιτελείς προτάσεις **1-4** και δίπλα της το γράμμα που αντιστοιχεί στο σωστό συμπλήρωμά της.

1. Σε μια φθίνουσα μηχανική ταλάντωση που η δύναμη απόσβεσης είναι της μορφής F=-bυ όπου b= η σταθερά απόσβεσης και υ= η ταχύτητα του ταλαντωτή :

α. η σταθερά απόσβεσης εξαρτάται από τις ιδιότητες του μέσου, το σχήμα και το μέγεθος του ταλαντωτή.

β. η περίοδος εξαρτάται από το πλάτος.

γ. η ενέργειά της παραμένει σταθερή.

δ. ο λόγος δύο διαδοχικών μέγιστων απομακρύνσεων προς την ίδια κατεύθυνση ελαττώνεται εκθετικά με το χρόνο.

(Μονάδες 5)

2. Όταν ακτίνα μονοχρωματικού φωτός περνάει από τον αέρα($η_α$=1) στο γυαλί το μήκος κύματός της ελαττώνεται κατά 25% της αρχικής τιμής του.

α. ο δείκτης διάθλασης του γυαλιού είναι $η=\frac{3}{2}$.

β. για την κρίσιμη γωνία κατά τη μετάβαση αυτού του μονοχρωματικού φωτός από το γυαλί στον αέρα ισχύει $ημθ_{crit}=\frac{3}{4}$.

γ. η συχνότητά του στο γυαλί μειώνεται.

δ. η ταχύτητα διάδοσης του μονοχρωματικού φωτός στο γυαλί είναι μεγαλύτερη από τον αέρα.

(Μονάδες 5)

3. Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα :

α. δημιουργούνται από σταθερά ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία.

β. είναι διαμήκη κύματα.

γ. έχουν τα διανύσματα της έντασης του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου κάθετα.

δ. υπακούουν στην αρχή της επαλληλίας μόνο όταν διαδίδονται στο κενό.

(Μονάδες 5)

4. Η έννοια της κρούσης στο μικρόκοσμο περιλαμβάνει φαινόμενα όπου:

α. τα σωματίδια όταν πλησιάζουν οι αλληλεπιδράσεις τους είναι πολύ ασθενείς.

β. η χρονική διάρκεια μεταβολής της κινητικής κατάστασης των σωματιδίων είναι πολύ μεγάλη.

γ. τα σωματίδια έρχονται σε επαφή για πολύ μικρό χρόνο.

δ. τα σωματίδια χωρίς να έρχονται σε επαφή αλληλεπιδρούν με μεγάλες δυνάμεις για πολύ μικρό χρόνο.

(Μονάδες 5)

5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Στο σύστημα ανάρτησης ενός αυτοκινήτου η διάρκεια των αποσβεννύμενων ταλαντώσεων που εκτελεί ελαττώνεται καθώς τα αμορτισέρ παλιώνουν και φθείρονται.

β. Από την σύνθεση των εξισώσεων δύο αρμονικών ταλαντώσεων της ίδιας διεύθυνσης, της ίδιας θέσης ισορροπίας, της ίδιας συχνότητας και του ιδίου πλάτους προκύπτει κίνηση που παρουσιάζει διακροτήματα.

γ. Τα ραδιοκύματα ανακλώνται σε μεταλλικές επιφάνειες.

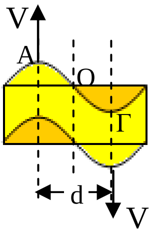
δ. Καθώς οι αστέρες νετρονίων συρρικνώνονται με την επίδραση εσωτερικών δυνάμεων η στροφορμή τους μειώνεται.

ε. Αν η συνισταμένη των δυνάμεων που επιδρούν σ΄ ένα αρχικά ακίνητο σώμα είναι μηδέν, τότε αυτό δεν μπορεί να στρέφεται.

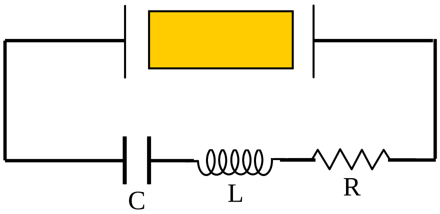
(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 2ο

Α₁. Στο **σχήμα α** εικονίζεται κρύσταλλος χαλαζία (quartz) πολύ μικρού πάχους σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου ο οποίος με την επίδραση ηλεκτρικού πεδίου έχει τεθεί σε κατακόρυφη αρμονική ταλάντωση η οποία διαδόθηκε ως αρμονικό κύμα κατά μήκος του κρυστάλλου. Το κύμα ανακλάστηκε στα άκρα του κρυστάλλου και στον κρύσταλλο δημιουργήθηκε μόνιμη κατάσταση στάσιμου κύματος. Στο στιγμιότυπο που φαίνεται στο **Σχήμα α** τα σημεία Α και Γ αντιστοιχούν σε διαδοχικές θέσεις μέγιστης κατακόρυφης παραμόρφωσης(κάμψης) που κινούνται με αντίθετες ταχύτητες ενώ το σημείο Ο παραμένει διαρκώς ακίνητο και η οριζόντια απόσταση των σημείων Α και Γ είναι ΑΓ=d=$5\cdot10^{-3}$m .Ο ταλαντούμενος κρύσταλλος αναπτύσσει στα άκρα του εναλλασσόμενη αρμονική τάση και συμπεριφέρεται ως κύκλωμα R-L-C σε σειρά που εκτελεί εξαναγκασμένη ηλεκτρική ταλάντωση και είναι σε κατάσταση συντονισμού. Το *ισοδύναμο κύκλωμα* που εικονίζεται στο **Σχήμα β** περιλαμβάνει *πυκνωτή* συνολικής χωρητικότητας $C=\frac{1}{64^2\pi^2}10^{-7}F$, *ιδανικό πηνίο* συντελεστού αυτεπαγωγής L, *ωμική αντίσταση* R και τον κρύσταλλο χαλαζία σε ρόλο *πηγής εναλλασσόμενης τάσης*. Αν η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων που δημιουργούνται στον κρύσταλλο είναι υ=3200m/s, ο συντελεστής αυτεπαγωγής του *ιδανικού πηνίου* L είναι:



(Σχήμα α)

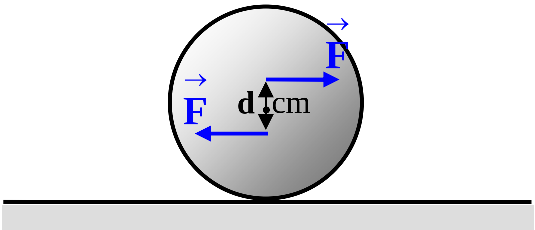


(Σχήμα β)

α. 0,4H **β.** 0,2H **γ.** 0,1H **(Μονάδες 3)**

Α₂. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 5)**

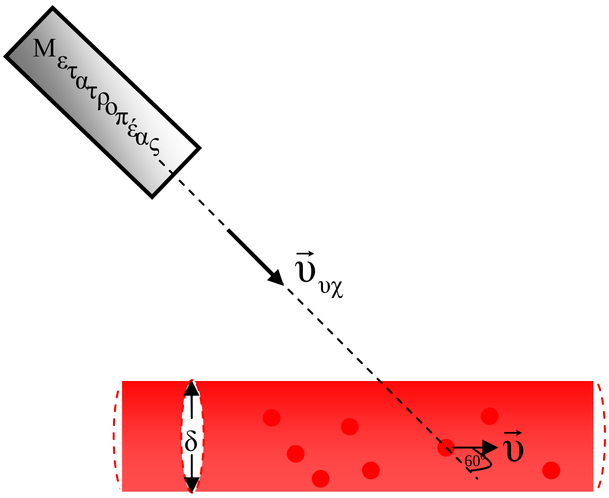
Β₁.Ομογενής τροχός μάζας M=1Kg και ακτίνας R=0,5m ηρεμεί στο οριζόντιο δάπεδο.
Στον τροχό αρχίζει να επιδρά ένα ζεύγος οριζόντιων δυνάμεων μέτρου F=6N, όπως στο σχήμα και μοχλοβραχίονα d=$\frac{R}{2}$.Το ζεύγος δυνάμεων παράγει έργο με ρυθμό που αυξάνεται σταθερά κατά 6 J/s^2 .Αν η ροπή αδρανείας του τροχού ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στο επίπεδό του είναι $I_{cm}=\frac{1}{2}MR^2$,ο τροχός



α. περιστρέφεται χωρίς να μετατοπίζεται.
β. κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.
γ. μετατοπίζεται χωρίς να περιστρέφεται. **(Μονάδες 3)**

Β₂. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 6)**

Γ$_1$. Στην εικόνα φαίνεται μια αρτηρία (κοινή καρωτίδα), την οποία θεωρούμε σταθερής κυκλικής διατομής, κατά τη διάρκεια ενός υπερηχογραφήματος που γίνεται με βάση το φαινόμενο Doppler. Ο μετατροπέας ενέργειας εκπέμπει υπέρηχους συχνότητας f_s=5MHz σε διεύθυνση που σχηματίζει γωνία $\hat{\theta}=60^{\circ}$ με τη διεύθυνση κίνησης των αιμοσφαιρίων η οποία είναι σταθερή καθώς η ροή του αίματος είναι στρωτή. Οι υπέρηχοι αφού ανακλαστούν στα ερυθρά αιμοσφαίρια επιστρέφουν στον μετατροπέα με συχνότητα $f_α$. Η διαφορά $\Delta f = |f_s - f_A|$ ονομάζεται μετατόπιση Doppler και στην περίπτωση αυτή είναι Δf=300Hz. Στον επόμενο πίνακα δίνονται τιμές της διαμέτρου δ της αρτηρίας καθώς και οι φυσιολογικές τιμές της ταχύτητας ροής όγκου αίματος V/t από μια διατομή της αρτηρίας οι οποίες αντιστοιχούν σε τρεις διαφορετικές ηλικιακές ομάδες.



Ηλικία	Διάμετρος αρτηρίας δ(m)	Φυσιολογικές τιμές ταχύτητας ροής όγκου αίματος V/t (m^3/s)
Νεογέννητο 2-3 ημερών	$4 \cdot 10^{-3}$	$1{,}1 \cdot 10^{-6}$ - $2{,}1 \cdot 10^{-6}$
Ενήλικας 21 -40 ετών	$7 \cdot 10^{-3}$	$6{,}5 \cdot 10^{-6}$- $9{,}5 \cdot 10^{-6}$
Ενήλικας 41-60 ετών	$7{,}5 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-6}$ - $8{,}5 \cdot 10^{-6}$

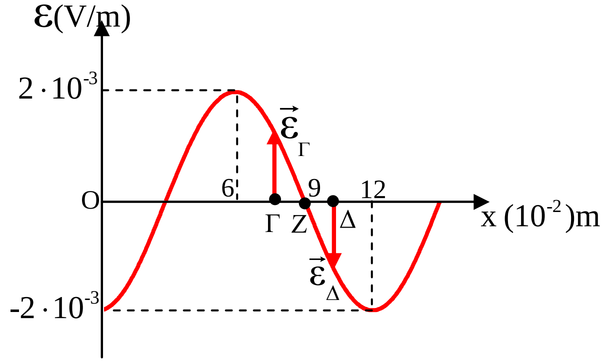
Αν η ταχύτητα των υπερήχων στο αίμα είναι $υ_{υχ}$=1500m/s και π=3,14, το υπερηχογράφημα αντιστοιχεί σε φυσιολογική εικόνα αρτηρίας:

α. Νεογέννητου 2-3 ημερών **β.** Ενήλικα 21 -40 ετών **γ.** Ενήλικα 41-60 ετών **(Μονάδες 3)**

Γ$_2$. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 6)**

ΘΕΜΑ 3ο

Στο σχήμα απεικονίζεται το στιγμιότυπο που αντιστοιχεί σε ηλεκτρικό πεδίο του οποίου η ένταση $\vec{ε}$ είναι κάθετη σε κάθε σημείο του άξονα Οx που βρίσκεται στο κενό. Τα διανύσματα αντιστοιχούν στην ένταση του ηλεκτρικού πεδίο στις θέσεις Γ($x_Γ$ =0,08m) και Δ($x_Δ$ =0,1m) και για το ρυθμό μεταβολής της αριθμητικής τιμής της έντασης στις θέσεις Γ και Δ τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή ισχύει $\frac{dε_{(Γ)}}{dt} > 0$ και $\frac{dε_{(Δ)}}{dt} < 0$ αντίστοιχα.



Α. Χρησιμοποιώντας το δοθέν στιγμιότυπο και τις πληροφορίες για την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στα σημεία Γ και Δ να δικαιολογήσετε την επιλογή σας μεταξύ των επόμενων τριών εκδοχών:

α. Το στιγμιότυπο αντιστοιχεί σε εγκάρσιο αρμονικό ηλεκτρικό κύμα που διαδίδεται προς τα δεξιά (θετική φορά) κατά μήκος του άξονα Ox.

β. Το στιγμιότυπο αντιστοιχεί σε εγκάρσιο αρμονικό ηλεκτρικό κύμα που διαδίδεται προς τα αριστερά (αρνητική φορά) κατά μήκος του άξονα Ox.

γ. Το στιγμιότυπο αντιστοιχεί σε στάσιμο ηλεκτρικό κύμα και στις θέσεις κοιλιών το πλάτος της ηλεκτρικής ταλάντωσης είναι μεγαλύτερο από $2\cdot 10^{-3}\,\dfrac{V}{m}$.

(Μονάδες 7)

Β. Αν για τη θέση Ο (x=0) δίνεται ότι τη χρονική στιγμή t=0 : $\mathcal{E}_{(O)}=0,\ \dfrac{d\mathcal{E}_{(O)}}{dt}>0$ και $\mathcal{E}_{max(O)}=4\cdot 10^{-3}\,\dfrac{V}{m}$, να γράψετε την εξίσωση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου για τις διάφορες θέσεις του άξονα Ox σε συνάρτηση με το χρόνο $\mathcal{E}=\mathcal{E}(x,t)$. **(Μονάδες 6)**

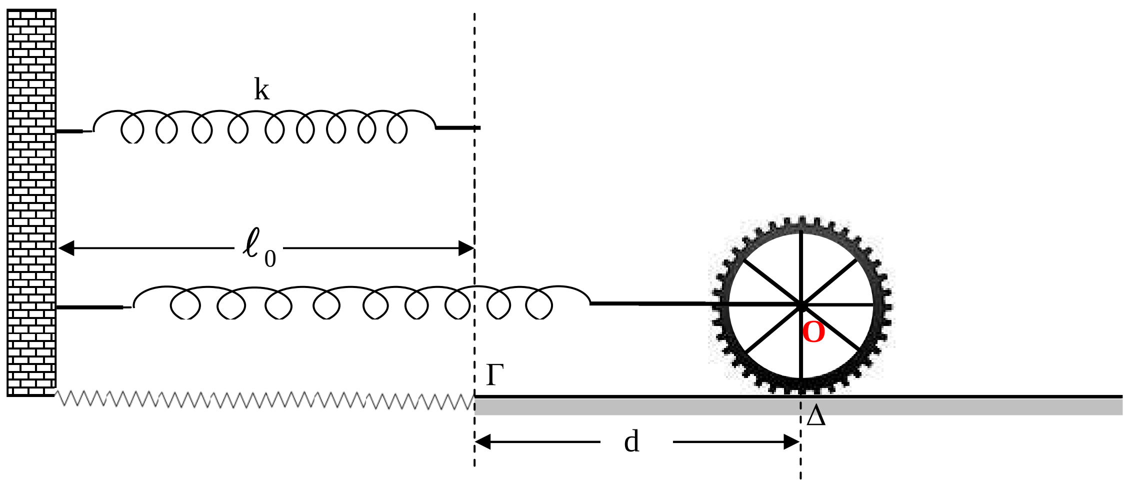
Γ. Να γράψετε τις εξισώσεις της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου σε συνάρτηση με το χρόνο στις θέσεις Γ και Δ. **(Μονάδες 6)**

Δ. Να προσδιορίσετε τις χρονικές στιγμές στις οποίες η διαφορά των στιγμιαίων εντάσεων του ηλεκτρικού πεδίου στα σημεία Ζ και Δ γίνεται κατ' απόλυτη τιμή μέγιστη.

(Μονάδες 6)

Δίνεται η ταχύτητα του φωτός στο κενό $c=3\cdot 10^{8}\,\dfrac{m}{s^2}$.

ΘΕΜΑ 4ο



Ο οδοντωτός τροχός του σχήματος μάζας m=1Kg και ακτίνας R θεωρούμε ότι έχει συγκεντρωμένη τη μάζα του στην περιφέρειά του. Το κέντρο μάζας Ο του τροχού έχει συνδεθεί με το ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=100N/m το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο στον κατακόρυφο τοίχο. Το τμήμα του δαπέδου δεξιά του σημείου Γ είναι λείο, ενώ αριστερά του Γ το δάπεδο παρουσιάζει εσοχές και εξοχές σε μήκος ίσο με το φυσικό μήκος του ελατηρίου ℓ_0. Εκτρέπουμε τον τροχό προς τα δεξιά κατά d=0,4m και στη συνέχεια αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο. Ο τροχός κατά την πρόσκρουσή του στην αρχή Γ του ανώμαλου τμήματος του δαπέδου και σε όλη τη διάρκεια της κίνησης του σ' αυτό δέχεται οριζόντια δύναμη τριβής. Αμέσως μετά την πρόσκρουσή του και σε όλη τη διάρκεια της κίνησής του επί του ανώμαλου τμήματος του δαπέδου ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

A_1. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του τροχού όταν αυτός κινούμενος για πρώτη φορά προς τα αριστερά φθάνει στο σημείο Γ. **(Μονάδες 3)**

A_2. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του τροχού μετά την πρόσκρουσή του στο σημείο Γ του ανώμαλου τμήματος του δαπέδου και την απόσταση από τον τοίχο στην οποία φθάνει ο τροχός όταν για πρώτη φορά κινείται προς τα αριστερά. **(Μονάδες 6)**

A_3. Να υπολογίσετε το (%) ποσοστό της απώλειας της κινητικής ενέργειας του τροχού κατά την πρόσκρουσή του στο σημείο Γ του ανώμαλου τμήματος του δαπέδου. **(Μονάδες 4)**

Β. Καθώς ο τροχός απομακρύνεται από τον τοίχο να υπολογίσετε τη μέγιστη απόσταση την οποία διανύει πάνω στο λείο τμήμα του δαπέδου. **(Μονάδες 5)**

Γ. Να μελετήσετε την κίνηση του τροχού όταν αυτός αρχίζει να κινείται για δεύτερη φορά προς τα αριστερά. Ποιά η τιμή της στροφορμής του τροχού λόγω περιστροφής περί το cm(ιδιοπεριστροφής) όταν αυτός βρεθεί στην τελική κινητική κατάστασή του; **(Μονάδες 7)**

Δίνεται η ροπή αδρανείας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του $I_{cm}=mR^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

1. α **2.** β **3.** γ **4.** δ **5.α.** Λάθος **β.** Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Λάθος **ε.** Λάθος

ΘΕΜΑ 2ο

Α$_1$. γ

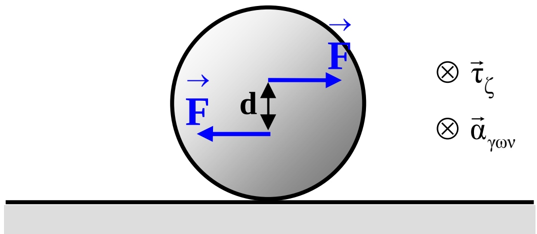
Α$_2$. Το *ισοδύναμο κύκλωμα* εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση και βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού. Επομένως, η συχνότητα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι ίση με την ιδιοσυχνότητά του $f = f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ **(1)**. Η συχνότητα με την οποία ταλαντώνονται τα διάφορα σημεία του κρύσταλλου χαλαζία όταν σ' αυτόν έχει δημιουργηθεί μόνιμη κατάσταση στάσιμου κύματος είναι ίση με την ιδιοσυχνότητα f_0 του κυκλώματος. Τα σημεία Α και Γ μέγιστης παραμόρφωσης αποτελούν διαδοχικές κοιλίες του στάσιμου κύματος ενώ το σημείο Ο αποτελεί δεσμό, επομένως η απόσταση d είναι ίση με το μισό του μήκους κύματος, $d = \dfrac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 2d \Rightarrow \lambda = 10^{-2}\,\text{m}$ **(2)**. Από τη θεμελιώδη σχέση της κυματικής $\upsilon = f\cdot\lambda \Rightarrow f = \dfrac{\upsilon}{\lambda} \Rightarrow f = \dfrac{3200}{10^{-2}} \Rightarrow f = 32\cdot 10^4\,\text{Hz}$ **(3)**.

Από την **(1)**: $f_0^2 = \dfrac{1}{4\pi^2 LC} \overset{(3)}{\Rightarrow} 32^2\cdot 10^8 = \dfrac{1}{4\pi^2 \dfrac{1}{64^2\pi^2}10^{-7}L} \Rightarrow 32^2\cdot 10^8 = \dfrac{64^2}{4L}10^7 \Rightarrow L = \dfrac{32^2\cdot 4\cdot 10^7}{4\cdot 32^2\cdot 10^8}$

$$\Rightarrow L = 0{,}1\,\text{H}$$

Β$_1$. β

Β$_2$. Υποθέτουμε ότι στον τροχό επιδρά μόνο το ζεύγος δυνάμεων. Ο ρυθμός με τον οποίο το ζεύγος δυνάμεων παράγει έργο είναι:



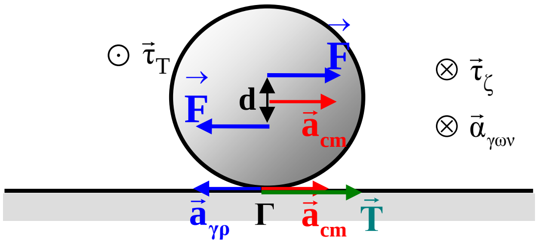
$$\frac{dW_{\tau_\zeta}}{dt} = P_{\tau_\zeta} = \tau_\zeta\omega \Rightarrow P_{\tau_\zeta} = F\frac{R}{2}\omega \Rightarrow \frac{dP_{\tau_\zeta}}{dt} = F\frac{R}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{2}{FR}\cdot\frac{dP_{\tau_\zeta}}{dt} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{2}{6\cdot 0{,}5}6 \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = 4\,\text{rad/s}^2 \quad \textbf{(1)}$$

Από την **(1)** προκύπτει ότι ο τροχός περιστρέφεται με σταθερή επιτάχυνση δηλαδή η περιστροφική του κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη. Από το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής για την περιστροφική κίνηση του τροχού μπορούμε να ελέγξουμε εάν η ροπή του ζεύγους είναι και η μοναδική που επιδρά στον τροχό:

$$\Sigma\tau_{(cm)} = I_{cm}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \overset{(1)}{\Rightarrow} F\frac{R}{2} = \frac{1}{2}MR^2\cdot\frac{2}{FR}\cdot\frac{dP_{\tau_\zeta}}{dt} \Rightarrow \frac{F^2}{2M} = \frac{dP_{\tau_\zeta}}{dt} \quad \textbf{(2)} \Rightarrow \frac{6^2}{2\cdot 1} = 6 \Rightarrow 18 = 6 \text{ άτοπο.}$$

Άρα στον τροχό πρέπει να επιδρά και άλλη ροπή αντίρροπη αυτής του ζεύγους ώστε να μειωθεί η συνολική ροπή στο πρώτο μέλος της σχέσης **(2)**. Η ροπή αυτή δεν μπορεί παρά να είναι η ροπή της τριβής που δέχεται ο τροχός από το δάπεδο, η οποία θα έχει φορά προς τα δεξιά.



Με την παρουσία της τριβής ο τροχός αναπτύσσει μεταφορική κίνηση και από το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής και θετική τη φορά της κίνησης:

$$\Sigma F = Ma_{cm} \Rightarrow F - F + T = Ma_{cm} \Rightarrow T = Ma_{cm} \Rightarrow a_{cm} = \frac{T}{M} \quad \textbf{(3)}$$

Από το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής για την περιστροφική κίνηση του τροχού και θεωρώντας θετικές τις ροπές που στρέφουν αντίθετα από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού:

$$\Sigma\tau_{(cm)} = I_{cm}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \overset{(1)}{\Rightarrow} F\frac{R}{2} - TR = \frac{1}{2}MR^2\cdot\frac{2}{FR}\cdot\frac{dP_{\tau_\zeta}}{dt} \Rightarrow \frac{F}{2} - T = \frac{M}{F}\cdot\frac{dP_{\tau_\zeta}}{dt} \Rightarrow$$

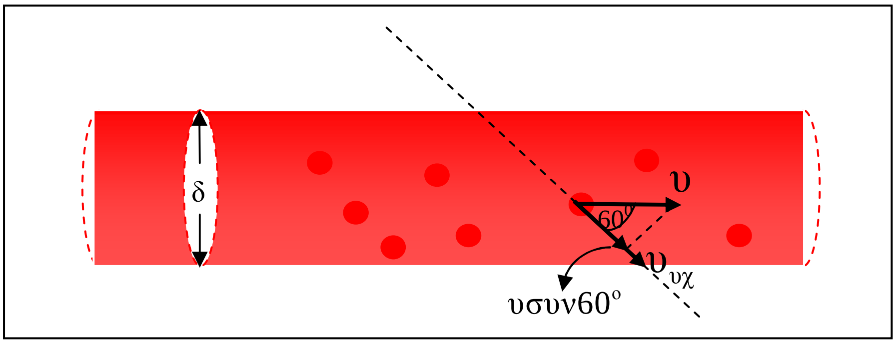
$$T = \frac{F}{2} - \frac{M}{F}\cdot\frac{dP_{\tau_\zeta}}{dt} \Rightarrow T = \frac{6}{2} - \frac{1}{6}\cdot 6 \Rightarrow T = 2N \quad \textbf{(4)}$$

Από **(3)** $\overset{(4)}{\Rightarrow} a_{cm} = 2m/s^2$.

Στο σημείο Γ επαφής του τροχού με το δάπεδο η γραμμική(επιτρόχιος) επιτάχυνση είναι $a_{\gamma\rho} = \alpha_{\gamma\omega\nu}R \overset{(1)}{\Rightarrow} a_{\gamma\rho} = 4\cdot 0{,}5 \Rightarrow a_{\gamma\rho} = 2m/s^2$, δηλαδή στο σημείο Γ η $\vec{a}_{\gamma\rho}$ και η $\vec{a}_{cm}$ είναι αντίρροπες και έχουν το ίδιο μέτρο, άρα ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει και η δύναμη τριβής είναι στατική τριβή.

Γ_1. α

Γ_2.



Ο μετατροπέας ενέργειας (ηχοβολέας ή transducer) εκπέμπει υπέρηχους συχνότητας f_s. Επειδή τα ερυθρά αιμοσφαίρια κινούνται απομακρυνόμενα από τον μετατροπέα με ταχύτητα υσυνθ κατά τη διεύθυνση διάδοσής των υπερήχων, οι υπέρηχοι προσπίπτουν στα ερυθρά αιμοσφαίρια με συχνότητα

$$f_\pi = f_s\frac{(\upsilon_{\upsilon x} - \upsilon\sigma\upsilon\nu\theta)}{\upsilon_{\upsilon x}} \quad \textbf{(1)}$$

όπου $\upsilon_{\upsilon x}$= η ταχύτητα των υπερήχων και υ= η ταχύτητα κίνησης των ερυθρών αιμοσφαιρίων.
Οι υπέρηχοι ανακλώνται στα αιμοσφαίρια και επιστρέφουν στο μετατροπέα με συχνότητα

$$f_\alpha = f_\pi\frac{\upsilon_{\upsilon x}}{(\upsilon_{\upsilon x} + \upsilon\sigma\upsilon\nu\theta)} \overset{(1)}{\Rightarrow} f_\alpha = f_s\frac{(\upsilon_{\upsilon x} - \upsilon\sigma\upsilon\nu\theta)}{\upsilon_{\upsilon x}}\,\frac{\upsilon_{\upsilon x}}{(\upsilon_{\upsilon x} + \upsilon\sigma\upsilon\nu\theta)} \Rightarrow f_\alpha = f_s\frac{(\upsilon_{\upsilon x} - \upsilon\sigma\upsilon\nu\theta)}{(\upsilon_{\upsilon x} + \upsilon\sigma\upsilon\nu\theta)} \quad \textbf{(2)}$$

Η μετατόπιση Doppler (ονομάζεται και συχνότητα Doppler) είναι:

$$\Delta f = |f_s - f_\alpha| \overset{(2)}{\Rightarrow} \Delta f = \left|f_s - f_s\frac{(\upsilon_{\upsilon x} - \upsilon\sigma\upsilon\nu\theta)}{(\upsilon_{\upsilon x} + \upsilon\sigma\upsilon\nu\theta)}\right| \Rightarrow \Delta f = \frac{2f_s\cdot\upsilon\sigma\upsilon\nu\theta}{\upsilon_{\upsilon x} + \upsilon\sigma\upsilon\nu\theta} \Rightarrow \upsilon = \frac{\Delta f\cdot\upsilon_{\upsilon x}}{(2f_s - \Delta f)\cdot\sigma\upsilon\nu\theta} \quad \textbf{(3)}$$

Ο όγκος αίματος που διαρρέει μία διατομή εμβαδού S της αρτηρίας σε χρόνο t είναι ο όγκος ενός κυλίνδρου εμβαδού βάσης S και ύψους x =υ·t :

$$V = S\cdot x \Rightarrow V = \pi\frac{\delta^2}{4}\cdot\upsilon\cdot t \Rightarrow \frac{V}{t} = \pi\frac{\delta^2}{4}\cdot\upsilon \overset{(3)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{V}{t} = \pi\frac{\delta^2}{4}\cdot\frac{\Delta f\cdot\upsilon_{\upsilon x}}{(2f_s - \Delta f)\cdot\sigma\upsilon\nu\theta} \Rightarrow \frac{V}{t} = \pi\frac{\delta^2}{4}\cdot\frac{(300\cdot 1500)}{(2\cdot 5\cdot 10^6 - 300)\cdot\sigma\upsilon\nu 60^o} \Rightarrow \frac{V}{t} = \pi\frac{\delta^2}{4}\cdot 9\cdot 10^{-2}$$

Αν στην τελευταία σχέση αντικαταστήσουμε τις τιμές της διαμέτρου της αρτηρίας για κάθε μία ηλικιακή ομάδα και με βάση τις φυσιολογικές τιμές ταχύτητας ροής όγκου αίματος του πίνακα έχουμε:

Νεογέννητο 2-3 ημερών : $\frac{V}{t} = 3,14\frac{4^2\cdot 10^{-6}}{4}\cdot 9\cdot 10^{-2} = 1,13\cdot 10^{-6}\,m^3/s \rightarrow$ φυσιολογική τιμή

Ενήλικας 21 -40 ετών : $\frac{V}{t} = 3,14\frac{7^2\cdot 10^{-6}}{4}\cdot 9\cdot 10^{-2} = 3,461\cdot 10^{-6}\,m^3/s \rightarrow$ μη φυσιολογική τιμή

Ενήλικας 41-60 ετών : $\frac{V}{t} = 3,14\frac{7,5^2\cdot 10^{-6}}{4}\cdot 9\cdot 10^{-2} = 3,974\cdot 10^{-6}\,m^3/s \rightarrow$ μη φυσιολογική τιμή

Άρα η εξέταση αφορά νεογέννητο 2-3 ημερών.

Σχόλιο

Στη βιβλιογραφία η σχέση που δίνεται συνήθως για τη μετατόπιση Doppler είναι :

$\Delta f = \frac{2f_s \cdot υσυνθ}{υ_{υx}}$ δηλαδή αμελείται ο όρος υσυνθ σε σχέση με τον όρο $υ_{υx}$ διότι η ταχύτητα ροής του αίματος είναι πολύ μικρότερη από την ταχύτητα των υπερήχων (στην παρούσα εφαρμογή 0,09m/s $\ll$ 1500 m/s). Εδώ ο όρος διατηρήθηκε για λόγους συνέπειας με όσα διδάσκονται στην ανάκλαση ήχων σε κινούμενο εμπόδιο.

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Αν το στιγμιότυπο αντιστοιχούσε σε εγκάρσιο Η/Μ κύμα που διαδίδεται προς τα δεξιά θα έπρεπε $\frac{dε_{(Δ)}}{dt} > 0$. Αν το στιγμιότυπο αντιστοιχούσε σε εγκάρσιο Η/Μ κύμα που διαδίδεται προς τα αριστερά θα έπρεπε $\frac{dε_{(Γ)}}{dt} < 0$.

Άρα το στιγμιότυπο αντιστοιχεί σε στάσιμο ηλεκτρικό κύμα και επειδή υπάρχουν σημεία του άξονα Οx στα οποία $\frac{dε}{dt} \neq 0$, οι εικονιζόμενες στιγμιαίες τιμές δεν μπορεί να αντιστοιχούν σε τιμές πλάτους της έντασης (ακρότατες τιμές). Οι μέγιστες στιγμιαίες τιμές στο στιγμιότυπο είναι τιμές έντασης ηλεκτρικού πεδίου σε θέσεις κοιλιών, αλλά δεν αντιστοιχούν στο πλάτος της ηλεκτρικής ταλάντωσης των κοιλιών, διότι $\frac{dε}{dt} \neq 0$ όχι μόνο στις θέσεις Γ και Δ , αλλά σε κάθε θέση εκτός από τις θέσεις των δεσμών, αφού σε όσες θέσεις υπάρχει ηλεκτρική ταλάντωση η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου παίρνει τη μέγιστη (απόλυτη) τιμή της ταυτόχρονα.

Β. Εφόσον για τη θέση Ο (x=0) δίνεται ότι για t=0: $\mathcal{E}_{(O)} = 0$, $\frac{d\mathcal{E}_{(O)}}{dt} > 0$ η εξίσωση του στάσιμου ηλεκτρικού κύματος θα είναι της μορφής $\mathcal{E} = 2\mathcal{E}_{max}συν\frac{2πx}{λ}\cdot ημ2πft$ **(1)**, όπου $\mathcal{E}_{max}$ = η μέγιστη τιμή της έντασης του καθενός από τα δύο τρέχοντα εγκάρσια αρμονικά Η/Μ κύματα που συνέβαλαν διαδιδόμενα σε αντίθετες φορές κατά μήκος του άξονα Οx, λ= το μήκος κύματος των τρεχόντων εγκάρσιων αρμονικών κυμάτων και f=η συχνότητα των τρεχόντων Η/Μ αρμονικών κυμάτων.

Από το δοθέν στιγμιότυπο προκύπτει ότι λ=0,12m και από τη θεμελιώδη σχέση της κυματικής:

$c=\lambda f \Rightarrow f=\dfrac{c}{\lambda} \Rightarrow f=\dfrac{3\cdot 10^8}{0,12} \Rightarrow f=25\cdot 10^8\,\text{Hz}$ **(2)**.

Στη θέση O (x = 0) η εξίσωση **(1)** δίνει $\mathcal{E}=2\mathcal{E}_{max}\cdot ημ2πft$, άρα $2\mathcal{E}_{max}=4\cdot 10^{-3}\,\text{V/m}$ **(3)**.

Από **(1)** $\underset{(3)}{\overset{(2)}{\Rightarrow}} \mathcal{E}=4\cdot 10^{-3}συν\dfrac{2πx}{0,12}\cdot ημ2πt25\cdot 10^8 \Rightarrow \mathcal{E}=4\cdot 10^{-3}συν\dfrac{50πx}{3}\cdot ημ5π10^9 t$ (S.I) **(4)**.

Γ. Με αντικατάσταση στη σχέση **(4)** έχουμε:

$$\mathcal{E}_{(Γ)}=4\cdot 10^{-3}συν\frac{50πx_{(Γ)}}{3}\cdot ημ5π10^9 t \Rightarrow \mathcal{E}_{(Γ)}=4\cdot 10^{-3}συν\frac{50π(0,08)}{3}\cdot ημ5π10^9 t \Rightarrow$$

$$\mathcal{E}_{(Γ)}=-2\cdot 10^{-3}\cdot ημ5π10^9 t \text{ (S.I)}$$

$$\mathcal{E}_{(Δ)}=4\cdot 10^{-3}συν\frac{50πx_{(Δ)}}{3}\cdot ημ5π10^9 t \Rightarrow \mathcal{E}_{(Δ)}=4\cdot 10^{-3}συν\frac{50π(0,1)}{3}\cdot ημ5π10^9 t \Rightarrow$$

$\mathcal{E}_{(Δ)}=2\cdot 10^{-3}\cdot ημ5π10^9 t$ (S.I) **(5)**

Δ. Η έκφραση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο Ζ είναι :

$$\mathcal{E}_{(Z)}=4\cdot 10^{-3}συν\frac{50πx_{(Z)}}{3}\cdot ημ5π10^9 t \Rightarrow \mathcal{E}_{(Z)}=4\cdot 10^{-3}συν\frac{50π(0,09)}{3}\cdot ημ5π10^9 t \Rightarrow$$

$\mathcal{E}_{(Z)}=0$ **(6)**, δηλαδή το σημείο Ζ είναι δεσμός.

Η απόλυτη τιμή της διαφοράς των στιγμιαίων εντάσεων στα σημεία Ζ και Δ είναι

$$Δ\mathcal{E}=\left|\mathcal{E}_{(Z)}-\mathcal{E}_{(Δ)}\right| \underset{(6)}{\overset{(5)}{\Rightarrow}} Δ\mathcal{E}=\left|0-2\cdot 10^{-3}\cdot ημ5π10^9 t\right| \Rightarrow Δ\mathcal{E}=2\cdot 10^{-3}\left|ημ5π10^9 t\right|$$

Η διαφορά των στιγμιαίων τιμών της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στα σημεία Ζ και Δ μεγιστοποιείται όταν $\left|ημ5π10^9 t\right|=1$ και είναι $Δ\mathcal{E}_{max}=2\cdot 10^{-3}$ V/m.

Οι ζητούμενες χρονικές στιγμές είναι:

$$\left|ημ5π10^9 t\right|=1 \Rightarrow ημ5π10^9 t=\pm 1 \Rightarrow 5π10^9 t=κπ+\frac{π}{2} \Rightarrow t=\frac{κ}{5}10^{-9}+10^{-10}$$

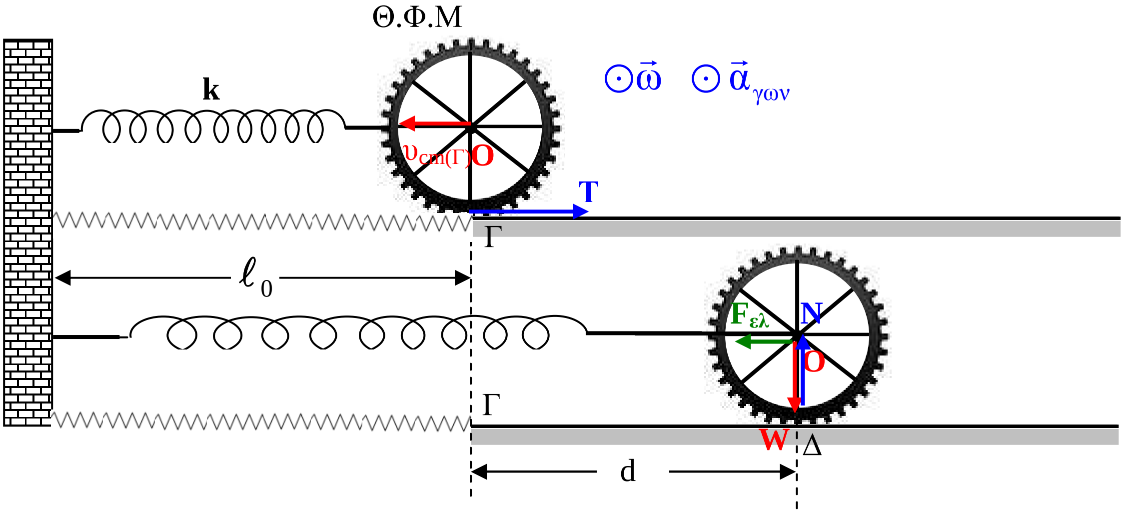
$$\Rightarrow t=(2κ+1)10^{-10}\text{s} \text{ με } κ=0,1,2...$$

ΘΕΜΑ 4ο

Α$_1$.

Ο τροχός αφήνεται ελεύθερος στη θέση **Δ** και εκτελεί μεταφορική κίνηση με την επίδραση της βαρυτικής δύναμης $\vec{W}$, της κάθετης αντίδρασης του λείου δαπέδου $\vec{N}$ και της δύναμης του ελατηρίου $\vec{F}_{ελ}$ μέχρι να φθάσει στο σημείο **Γ** με ταχύτητα μέτρου $υ_{cm(Γ)}$ όπου προσκρούει και συμπλέκεται με το δάπεδο. Από την **Α**ρχή **Δ**ιατήρησης της **Ε**νέργειας :

$$U_{ελ(Δ)}=K_Γ \Rightarrow \frac{1}{2}kd^2=\frac{1}{2}mυ^2_{cm(Γ)} \Rightarrow υ_{cm(Γ)}=d\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow υ_{cm(Γ)}=0,4\sqrt{\frac{100}{1}} \Rightarrow υ_{cm(Γ)}=4\frac{m}{s} \quad \textbf{(1)}$$



(Σχήμα α)

Α₂.

Η δύναμη τριβής $\vec{T}$ που δέχεται ο τροχός κατά την πρόσκρουσή του στο σημείο **Γ** του ανώμαλου δαπέδου όπως φαίνεται στο **Σχήμα α** έχει φορά προς τα δεξιά και επιβραδύνει τη μεταφορική κίνηση του τροχού, ταυτόχρονα με τη ροπή της ως προς το κέντρο μάζας του τροχού αρχίζει να περιστρέφει τον τροχό ο οποίος αρχίζει να εκτελεί επιταχυνόμενη στροφική κίνηση με φορά αντίθετη από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού.
Από την γενικευμένη μορφή του Θεμελιώδους Νόμου της Μηχανικής για την μεταφορική κίνηση του τροχού και θεωρώντας θετική την φορά της κίνησης του τροχού έχουμε:

$$\Sigma\vec{F}_{εξ} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow -Tdt = mυ'_{cm(Γ)} - mυ_{cm(Γ)} \Rightarrow Tdt = mυ_{cm(Γ)} - mυ'_{cm(Γ)} \quad \textbf{(2)}$$

όπου $υ'_{cm(Γ)}$ η ταχύτητα του κέντρου μάζας του τροχού μετά το τέλος της πρόσκρουσης.
Από την γενικευμένη μορφή του Θεμελιώδους Νόμου της Μηχανικής για την περιστροφική κίνηση και μοναδική δύναμη που να προσδίδει ροπή στον τροχό ως προς το κέντρο μάζας του τη δύναμη της τριβής $\vec{T}$ αν θεωρήσουμε ως θετική την φορά των ροπών που στρέφουν αντίθετα από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού έχουμε:

$\Sigma\tau_{εξ(cm)} = \frac{dL_{(cm)}}{dt} \Rightarrow TRdt = I_{cm}\omega - 0 \Rightarrow TRdt = mR^2\omega$ **(3)**.Η γωνιακή ταχύτητα που αποκτά ο τροχός στο τέλος της πρόσκρουσης είναι αυτή με την οποία αρχίζει να κυλίεται επί του ανώμαλου τμήματος του δαπέδου, άρα συνδέεται με την ταχύτητα του κέντρου μάζας αμέσως μετά το τέλος της πρόσκρουσης με την σχέση $υ'_{cm(Γ)} = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{υ'_{cm(Γ)}}{R}$ **(4)**.

Από **(3)** $\overset{(4)}{\Rightarrow}$ $Tdt = mυ'_{cm(Γ)}$ **(5)**.Από τις **(2)** και **(5)**: $mυ'_{cm(Γ)} = mυ_{cm(Γ)} - mυ'_{cm(Γ)} \Rightarrow υ'_{cm(Γ)} = \frac{υ_{cm(Γ)}}{2}$

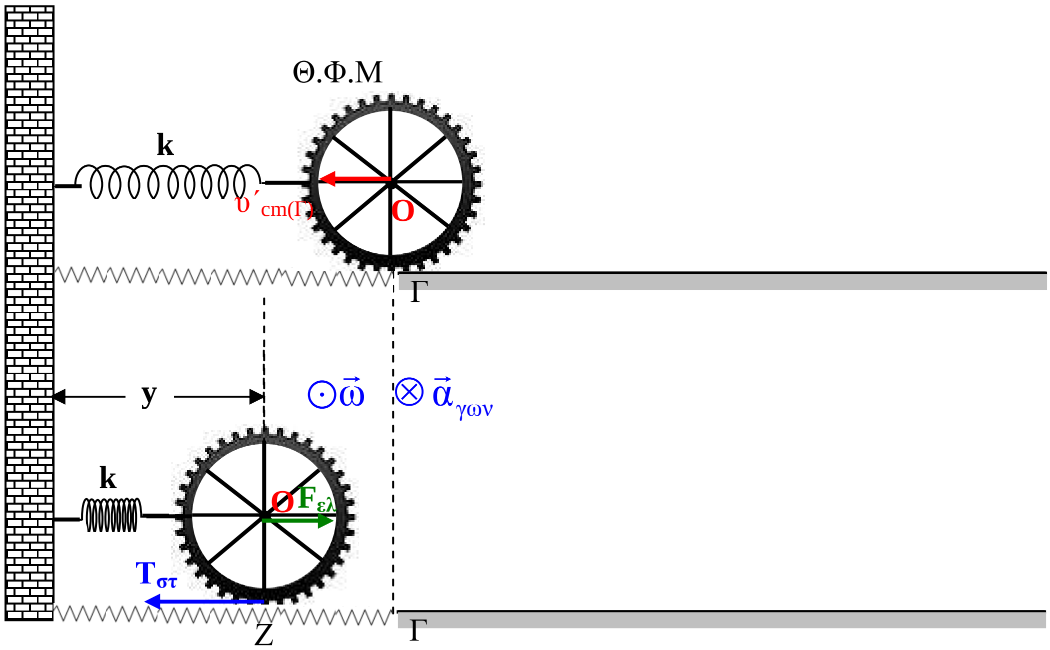
$$\overset{(1)}{\Rightarrow} υ'_{cm(Γ)} = 2\frac{m}{s} \quad \textbf{(6)}$$

Κατά τη διάρκεια της προς τα αριστερά κίνησης του τροχού επειδή η μεταφορική κίνηση επιβραδύνεται από τη δράση της δύναμης του ελατηρίου πρέπει να επιβραδύνεται και η περιστροφική κίνηση του τροχού για να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, επομένως αλλάζει η φορά της δύναμης στατικής τριβής $T_{στ}$ και γίνεται όπως φαίνεται στο **Σχήμα β** δηλαδή προς τα αριστερά.

Ο τροχός φθάνει σε απόσταση **y** από τον τοίχο (Θέση **Z**) όπου στιγμιαία ακινητοποιείται. Από την **Α**ρχή **Δ**ιατήρησης της **Ε**νέργειας :

$$K_{\mu\Gamma}+K_{\sigma\tau\Gamma}=U_{\varepsilon\lambda(Z)}\Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon'^2_{cm(\Gamma)}+\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2=\frac{1}{2}ky^2\overset{(4)}{\Rightarrow}\frac{1}{2}m\upsilon'^2_{cm(\Gamma)}+\frac{1}{2}mR^2\frac{\upsilon'^2_{cm(\Gamma)}}{R^2}=\frac{1}{2}ky^2\Rightarrow m\upsilon'^2_{cm(\Gamma)}=\frac{1}{2}ky^2$$

$$\overset{(6)}{\Rightarrow}m\frac{\upsilon^2_{cm(\Gamma)}}{4}=\frac{1}{2}ky^2\overset{(1)}{\Rightarrow}y^2=\frac{m}{2k}d\frac{k}{m}\Rightarrow y=\frac{d\sqrt{2}}{2}=0,2\sqrt{2}\ \text{m}\ (7).$$



(Σχήμα β)

Α$_3$.

Η απώλεια κινητικής ενέργειας κατά την πρόσκρουση είναι

$$|\Delta K|=\left|\left(\frac{1}{2}m\upsilon'^2_{cm(\Gamma)}+\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2\right)-\frac{1}{2}m\upsilon^2_{cm(\Gamma)}\right|\overset{(A.\Delta.E)}{\Rightarrow}|\Delta K|=\left|\frac{1}{2}ky^2-\frac{1}{2}m\upsilon^2_{cm(\Gamma)}\right|$$ και το (%) ποσοστό της απώλειας της Κινητικής ενέργειας είναι:

$$\pi(\%)=\frac{|\Delta K|}{\frac{1}{2}m\upsilon^2_{cm(\Gamma)}}100\%\Rightarrow\pi(\%)=\frac{(\frac{1}{2}m\upsilon^2_{cm(\Gamma)}-\frac{1}{2}ky^2)}{\frac{1}{2}m\upsilon^2_{cm(\Gamma)}}100\%\Rightarrow\pi(\%)=(1-\frac{ky^2}{m\upsilon^2_{cm(\Gamma)}})100\%$$

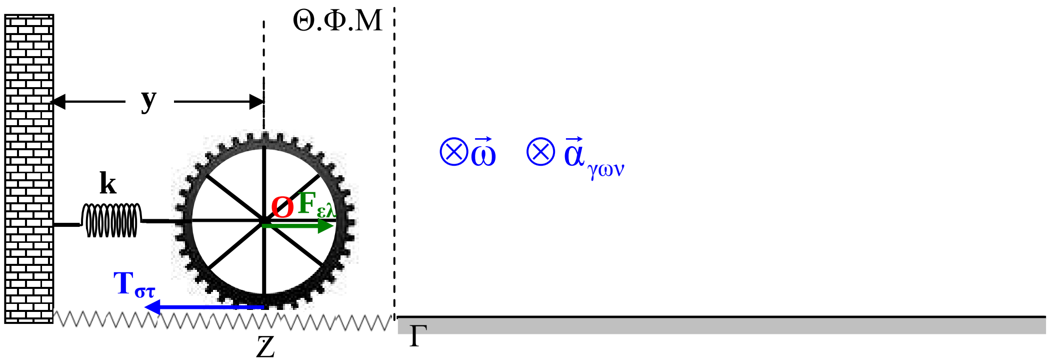
$$\underset{(7)}{\overset{(1)}{\Rightarrow}}\pi(\%)=(1-\frac{ky^2}{m\upsilon^2_{cm(\Gamma)}})100\%\Rightarrow\pi(\%)=(1-\frac{100\cdot0,2^2\cdot2}{1\cdot4^2})100\%\Rightarrow\pi(\%)=50\%.$$

Β.

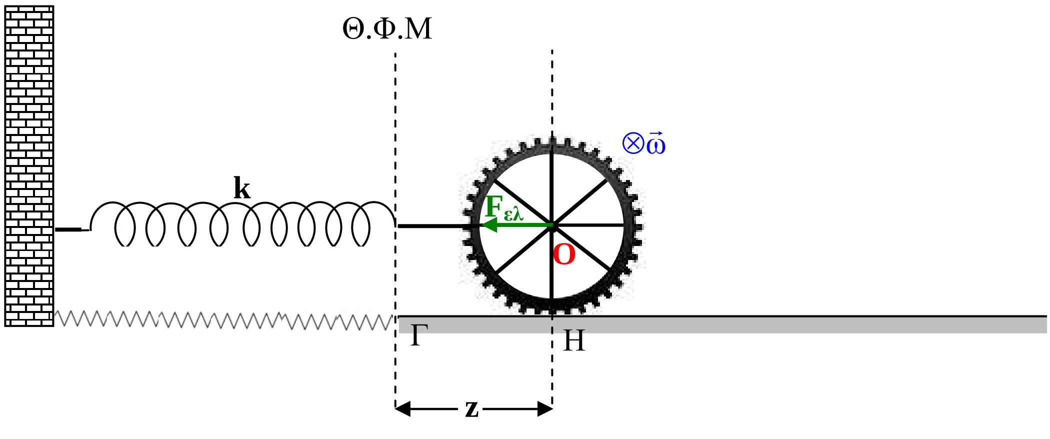
Στη θέση **Z** ο τροχός ακινητοποιείται στιγμιαία και αμέσως μετά αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει προς τα δεξιά, για να συμβεί αυτό πρέπει η στατική τριβή να έχει πάλι τη φορά που φαίνεται στο **Σχήμα γ** δηλαδή προς τα αριστερά, ώστε να περιστρέφει και επιταχύνει τον τροχό, κατά τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού ,αφού αυτός καθώς επιστρέφει προς τη θέση **Γ** επιταχύνει τη μεταφορική κίνησή του με την επίδραση της συνισταμένης των $F_{\varepsilon\lambda}$ και $T_{\sigma\tau}$. Όταν ο τροχός περάσει από τη θέση **Γ** και βρεθεί στο λείο τμήμα του δαπέδου δεν υπάρχει τριβή και η γωνιακή του ταχύτητα καθώς και η Κινητική του ενέργεια λόγω περιστροφικής κίνησης διατηρούνται σταθερές ενώ η δύναμη του ελατηρίου επιβραδύνει τη μεταφορική κίνησή του και τελικά φθάνει σε απόσταση **z** από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου (θέση **Η**), όπως φαίνεται στο **Σχήμα δ** , συνεχίζοντας την περιστροφική του κίνηση. Από την **Α**ρχή **Δ**ιατήρησης της **Ε**νέργειας :

$$U_{ελ(Δ)} = K_{στΓ} + U_{ελ(Η)} \Rightarrow \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}kz^2 \overset{(4)}{\Rightarrow} ky^2 = mR^2\frac{υ'^2_{cm(Γ)}}{R^2} + kz^2 \overset{(7)}{\Rightarrow} \frac{kd^2}{2} = mυ'^2_{cm(Γ)} + kz^2$$

$$\overset{(4)}{\Rightarrow} \frac{kd^2}{2} = m\frac{υ^2_{cm(Γ)}}{4} + kz^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{kd^2}{2} = m\frac{kd^2}{4m} + kz^2 \Rightarrow z = \frac{d}{2} = 0,2m \quad \mathbf{(8)}$$



(Σχήμα γ)



(Σχήμα δ)

Γ.
Ο τροχός καθώς κινείται για 2η φορά προς τα αριστερά επιστρέφει προς τη θέση **Γ** επιταχυνόμενος με την επίδραση της δύναμης του ελατηρίου. Η Κινητική Ενέργεια λόγω μεταφορικής κίνησης αυξάνεται, η Κινητική Ενέργεια λόγω περιστροφικής κίνησης διατηρείται σταθερή καθώς δεν υπάρχει ροπή που να μεταβάλλει την γωνιακή ταχύτητα και η Δυναμική Ενέργεια του ελατηρίου μειώνεται. Από την **Α**ρχή **Δ**ιατήρησης της **Ε**νέργειας μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα $υ''_{cm(Γ)}$ του κέντρου μάζας του τροχού όταν αυτός προσκρούει για δεύτερη φορά στο ανώμαλο τμήμα του δαπέδου:

$$U_{ελ(Η)} + \cancel{K}_{στ} = \cancel{K}_{στ} + K_μ \Rightarrow \frac{1}{2}kz^2 = \frac{1}{2}mυ''^2_{cm(Γ)} \overset{(4)}{\Rightarrow} \frac{1}{2}k\frac{d^2}{4} = \frac{1}{2}mυ''^2_{cm(Γ)} \Rightarrow υ''^2_{cm(Γ)} = \frac{k}{m}\frac{d^2}{4} \Rightarrow υ''_{cm(Γ)} = \frac{d}{2}\sqrt{\frac{k}{m}} \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$υ''_{cm(Γ)} = \frac{υ_{cm(Γ)}}{2} = 2\frac{m}{s} \quad \mathbf{(9)}$$

Για την $2^η$ πρόσκρουση του τροχού στο ανώμαλο τμήμα του δαπέδου η οποία γίνεται με ταχύτητα κέντρου μάζας υποδιπλάσια αυτής της $1^{ης}$ πρόσκρουσης εφαρμόζουμε πάλι τον Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής για την μεταφορική και θεωρώντας θετική την φορά της κίνησης του τροχού έχουμε:

$$\Sigma\vec{F}_{\varepsilon\xi}=\frac{d\vec{p}}{dt}\Rightarrow -Tdt=m\upsilon'''_{cm(\Gamma)}-m\upsilon''_{cm(\Gamma)}\Rightarrow Tdt=m\upsilon''_{cm(\Gamma)}-m\upsilon'''_{cm(\Gamma)}\overset{(9)}{\Rightarrow}Tdt=m\frac{\upsilon_{cm(\Gamma)}}{2}-m\upsilon'''_{cm(\Gamma)}\quad \textbf{(10)}$$

όπου $\upsilon'''_{cm(\Gamma)}$ η ταχύτητα του κέντρου μάζας του τροχού μετά το τέλος της $2^{ης}$ πρόσκρουσης.

Όμως, η γωνιακή ταχύτητα που απέκτησε ο τροχός μετά την $1^η$ πρόσκρουσή του στο σημείο **Γ** διατηρήθηκε σταθερή κατά την κίνησή του στο ανώμαλο τμήμα του δαπέδου εφόσον η στατική τριβή δεν μεταβάλλει την ενέργεια του συστήματος τροχός- ελατήριο όπως και στην κίνησή του στο λείο δάπεδο όπου δεν υπάρχει ροπή επί του τροχού, άρα η τιμή της είναι ίδια με αυτήν που υπολογίστηκε από τη σχέση **(4)**.

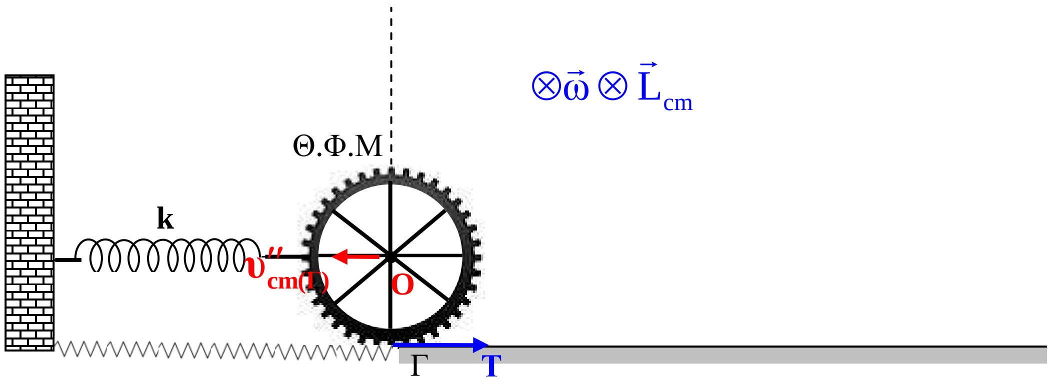
Από την γενικευμένη μορφή του Θεμελιώδους Νόμου της Μηχανικής για την περιστροφική κίνηση και μοναδική δύναμη που να προσδίδει ροπή στον τροχό ως προς το κέντρο μάζας του τη δύναμη της τριβής $\vec{T}$,όπως φαίνεται στο **Σχήμα ε,** αν θεωρήσουμε ως θετική την φορά των ροπών που στρέφουν αντίθετα από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού έχουμε:

$$\Sigma\tau_{\varepsilon\xi(cm)}=\frac{dL_{(cm)}}{dt}\Rightarrow TRdt=L'-(-I_{cm}\omega)\Rightarrow TRdt=I_{cm}\omega'-(-I_{cm}\omega)\Rightarrow Tdt=mR\omega'+mR\omega\quad \textbf{(11)}$$

όπου L' και ω' οι αλγεβρικές τιμές της στροφορμής και της γωνιακής ταχύτητας αντίστοιχα λόγω περιστροφής περί το cm μετά το τέλος της $2^{ης}$ πρόσκρουσης.

Από **(11)** $\overset{(4)}{\Rightarrow}$ $Tdt=mR\omega'+m\upsilon'_{cm(\Gamma)}\overset{(6)}{\Rightarrow}Tdt=mR\omega'+m\frac{\upsilon_{cm(\Gamma)}}{2}$ **(12)**

Από τις **(10)** και **(12)**: $m\frac{\upsilon_{cm(\Gamma)}}{2}-m\upsilon'''_{cm(\Gamma)}=mR\omega'+m\frac{\upsilon_{cm(\Gamma)}}{2}\Rightarrow\upsilon'''_{cm(\Gamma)}=-\omega'R\Rightarrow\omega'=-\frac{\upsilon'''_{cm(\Gamma)}}{R}$!!



(Σχήμα ε)

Η τελευταία σχέση μας δείχνει ότι η γωνιακή ταχύτητα αλλάζει φορά , αλλά για να συμβεί αυτό πρέπει προηγουμένως να μηδενιστεί, άρα να μηδενιστεί και η μεταφορική ταχύτητα, $\omega'=0$ και $\upsilon'''_{cm(\Gamma)}=0$, δηλαδή να μηδενιστεί η ολική Κινητική ενέργειά του, με την απουσία ροπής αυτή θα είναι και η τελική κατάσταση του τροχού. Η σχέση $\omega'=-\frac{\upsilon'''_{cm(\Gamma)}}{R}$ αποδείχθηκε ανεξάρτητα από το «ποιό» και «πόσο» είναι το dt , επομένως ισχύει από την πρώτη στιγμή που αρχίζει η 2^{η} πρόσκρουση. Το σημείο επαφής του τροχού με το δάπεδο στο σημείο **Γ** ακινητοποιείται και ο τροχός παραμένει στο σημείο **Γ** καθώς η δύναμη Τ με το έργο της να καταναλώνει την Κινητική Ενέργεια του.

Επομένως η τελική τιμή της στροφορμής λόγω περιστροφής περί το cm θα είναι $\vec{L}'_{cm} = 0$.

Ξ. Στεργιάδης