ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελ 186 σχολικό βιβλίο
Α2. Σελ 76 σχολικό βιβλίο
Α3. Σελ 161 σχολικό βιβλίο
Α4. α) Σωστό
β) Σωστό
γ) Λάθος
δ) Λάθος
ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Από το Θεώρημα του Fermat πρέπει f′(1)=0
f′(x) $= 3x^2 + 2ax + 9$
f′ (1) =0 $\Leftrightarrow 2\alpha + 12 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -6$

Β2. Για α=-6 έχω f(x)= $x^3 - 6x^2 + 9x - 3$
$f'(x) = 3x^2 - 12 + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f′(x)		+	0	-	0	+	
f(x)		↗		↘		↗	

Η f συνεχής [0,1]
f (0) = -3
f(1)=1
Άρα $f(0) \cdot f(1) = -3 < 0$
Άρα από το Θεώρημα του Bolzano υπάρχει ρ_1 στο διάστημα (0,1) ώστε $f(\rho_1) = 0$
Όμοια η f συνεχής στο [1, 3]
$f(1) \cdot f(3) = (1) \cdot (-3) = -3 < 0$
άρα υπάρχει $\rho_2 \in (1,3)$ ώστε f(ρ_2) $= 0$ και η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο [3, $+\infty$] άρα το σύνολο τιμών f ([3, $+\infty$]) = $[-3, +\infty)$
Το $o \in (-3, +\infty)$ άρα υπάρχει $\rho_3 \in (3, +\infty)$ ώστε f (ρ_3) $= 0$
Η f έχει 3 θετικές ρίζες και επειδή είναι πολυωνυμική τρίτου βαθμού έχει ακριβώς 3.

Β3. f′′(x) =1x-12=6(x-2)

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f′(x)		-	0	+	
f(x)			ΣΚ		

Άρα η f είναι κοίλη στο ($-\infty$,2] και κυρτή στο $[2,+\infty)$ και έχει σημείο καμπής το (2,f(2))

Β4.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο (ξ , f(ξ))είναι ψ-f(ξ)=f′(ξ) (x-ξ) για x=0
ψ=-f′(ξ)ξ+f(ξ) άρα τέμνει τον ψ΄ψ στο σημείο Α(ξ, f(ξ)-ξf′(ξ)]
Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο (ξ , g(ξ)) είναι ψ-g(ξ)=g′(ξ)$\cdot(x-\xi)$ για x=0
ψ=g (ξ)-ξ$g'(\xi)$ άρα τέμνει τον ψ΄ψ στο σημείο Β (ξ , g(ξ)-ξg′(ξ))
Ισχύει g (x)=x+f(x)
g΄(x)=1+f′(x)
άρα g (ξ)-ξg′(ξ)=ξ+f(ξ)-ξ (1+f ‵(ξ))=ξ+f (ξ)-ξ $-\xi f'(\xi)=f(\xi)-\xi\cdot f'(\xi)$
Άρα τα σημεία Α και Β ταυτίζονται.

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x)=\begin{cases} e^x\eta\mu x & ,x<0 \\ \sqrt{x^2+x} & ,x\geq 0\end{cases}$$

Γ1. Συνέχεια :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} e^x\eta\mu x=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x^2+x}=0$$

$f(0)=0$ Άρα, f συνεχή στο X=0

Παραγωγησιμότητα :

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x\eta\mu x}{x}=\lim_{x\to 0^-} e^x\cdot\frac{\eta\mu x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}=\frac{x^2+x}{x\cdot\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(x+1)}{x\cdot\sqrt{x^2+x}}=+\infty$$ όποτε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$

Γ2. Κατακόρυφη δεν υπάρχει:

Στο $+\infty$

$$\lambda=\lim_{x\to 0^{+\infty}}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^{+\infty}}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}=\lim_{x\to 0^{+\infty}}=\frac{x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x}=1$$

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim_{x\to 0^{+\infty}}(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}^2-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}$$

Άρα η y=x+$\frac{1}{2}$ πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

$-\infty$

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x}\eta\mu x}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x} = 0$$

$$\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| \le \left|\frac{1}{x}\right| \Leftrightarrow -\left|\frac{1}{x}\right| \le \frac{\eta\mu x}{x} \le \left|\frac{1}{x}\right|$$

από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x}{x} = 0$

$\beta = \lim\limits_{x-\infty} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}\eta\mu x = 0$ (από κριτήριο παρεμβολής)

$y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $-\infty$

Γ3. Έστω $g(x) = f(x) - x - \frac{1}{2}$

H g είναι συνεχής στο [-π 0] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

g(0)= $f(0) - \frac{1}{2} < 0$

$g(-\pi) = f(-\pi) + \pi - \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2} > 0$

Από Θεώρημα Bolzano υπάρχει 1 τουλάχιστον ξ $\in (-\pi, 0)$ τέτοιο ώστε g(ξ)=0

Γ4. 'Εστω Μ $(x(t), y(t))$ $y(t) = f(x(t))$

$y'(t) = x'(t)$

$$\frac{2x(t)\cdot x'(t) + x'(t)}{2\sqrt{x^2(t)+x(t)}} = x'(t)$$

$$\frac{2x(t)+1}{2\sqrt{x^2(t)+x(t)}} = 1$$ **γιατί x′(t)>0**

$2x(t)+1 = 2\sqrt{x^2(t)+x(t)}$

$(2x(t)+1)^2 = (2\sqrt{x^2(t)+x(t)})^2$

ΛΥΣΗ: $4x^2(t) + 4x(t) + 1 = 4x^2(t) + 4x(t)$ **Αδύνατη**

$1 = 0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η g παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$$g'(x) = \frac{f(x)\cdot x^{\ln x} - F(x)\cdot x^{\ln x}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{(x^{\ln x})^2}$$

$$\frac{\frac{2F(x)\cdot\ln x\cdot x^{\ln x}}{x} - \frac{2F(x)\cdot x^{\ln x}\cdot\ln x}{x}}{(x^{\ln x})^2} = 0$$

Αρα g(x) = c

Δ2. i) α' τρόπος: $x \cdot f(x) = 2F(x) \cdot \ln x$ για x=1: f(1)=0

Παραγωγίζω κατά μέλη άρα

$x \cdot f'(x) + f(x) = 2f(X) \cdot \ln x + \dfrac{2F(x)}{x}$ για x=1: F(1)=1

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x\to1}\frac{2F(x)}{x} = 2F(1) = 2$$

β' τρόπος:

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x\to1}\frac{\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}}{\dfrac{\ln x}{x-1}} = 2$$

Αφού

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 2$ **και** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x} = 1$

ii) Από Δ1: g(x)=c για x=1:c=1

Άρα: $\dfrac{F(x)}{x^{\ln x}} = 1 \Leftrightarrow F(x) = x^{\ln x}, x > 0$

Δ3. F′(x) = $e^{\ln^2 x} \cdot \dfrac{2\ln x}{x}$

F′(x) =0 $\Leftrightarrow$ x=1

F′(x)>0$\Leftrightarrow$ x>1

x	0	1	$+\infty$
f′(x)	-	0	+
f(x)	↘		↗

Η F είναι γνησίως αύξουσα στο (0,1]

Η F είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$

$F(x^2) - F(x) = -(x-1)^2 < 0$ για $x \neq 1$

x=1 προφανής ρίζα

για 0<x<1 , x> $x^2 \overset{F\downarrow}{\Leftrightarrow} F(x) < F(x^2) \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) > 0$ άρα η εξίσωση είναι αδύνατη

για x>1, x< $x^2 \overset{F\uparrow}{\Leftrightarrow} F(x) < F(x^2) \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) > 0$ άρα η εξίσωση είναι αδύνατη

Άρα η x=1 μοναδική ρίζα

Δ4. Για x>1 $\overset{F\uparrow}{\Leftrightarrow} F(x) > F(1) = 1 > 0$ άρα το εμβαδόν είναι το $\mathrm{E} = \int_1^e F(x)dx$

Ισχύει $e^x \geq x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (το = ισχύει για x=0)

Άρα για x= $\ln^2 x$: $e^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x + 1$ (το = ισχύει για x=1)

Άρα $F(x) \geq \ln^2 x + 1 \Rightarrow \int_1^e F(x)dx > \int_1^e (\ln^2 x + 1)dx$

$\int_1^e (\ln^2 x + 1) = \int_1^e \ln^2 x dx + \int_1^e 1 dx =$

$[x \cdot \ln^2 x]_1^e - \int_1^e 2 \cdot \ln x dx + [x]_1^e$

$= e - 2[x \ln x]_1^e + 2\int_1^e 1 dx + e - 1 = 2e - 3$

Άρα Ε>2e-3

Επιμέλεια
Ανδρέας Ανδρέου - Κατερίνα Καρτσώνη - Έφη Ζαντιώτη